الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الرياضيات

السنة الثالثة من التعليم الثانوي العام و التكنولوجي

الشعبة:

- تسيير و اقتصاد

إشراف و تأليف

جمال تاوريرت — مفتش التربية والتكوين

المؤلفون:

- محمد فاتح مراد — مفتش التربية والتكوين
- محمد قورين — مفتش التربية والتكوين
- عبد الحفيظ فلاح — أستاذ التعليم الثانوي
- عبد المؤمن موس — أستاذ التعليم الثانوي
- غريسي بلجيلالي — أستاذ التعليم الثانوي

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

الديوان الوطني
Onps
للمطبوعات المدرسية
Office National des Publications Scolaires

2011-2012
MS : 1312/07
ISBN : 978 - 9947 - 20 - 522 - 8 : ردمك
Dépot légal : 120 - 2007 : رقم الإيداع القانوني

مصادق عليه من طرف لجنة الاعتماد والمصادقة للمعهد الوطني للبحث في التربية
- وزارة التربية الوطنية - وفق القرار رقم 1336 / م.ع / 2008 بتاريخ 22 أكتوبر 2008

elbassair.net

بسم الله الرحمان الرحيم

مدخل

أعد هذا الكتاب استجابة لمتطلبات المنهاج الجديد الخاص بالسنة الثالثة من التعليم الثانوي العام و التكنولوجي، شعبة التسيير و الاقتصاد و الذي شرع في تطبيقه ابتداء من الدخول المدرسي 2007 – 2008 .

بالإضافة إلى الاحترام التام للمنهاج فقد حاولنا العمل بمختلف التوجيهات الواردة فيه كما حرصنا على تجسيد المقاربة بالكفاءات التي بني عليها من خلال اختيار أنشطة مناسبة سواء عند مقاربة مختلف المفاهيم أو عند إدماجها. ضف إلى ذلك الاهتمام بالبرهان الرياضي و استعمال تكنولوجيات الإعلام و الاتصال.

يحتوي الكتاب على عشرة (10) أبواب تمت هيكلتها بنفس الكيفية على النحو التالي:

- عرض للكفاءات المستهدفة إضافة إلى نبذة تاريخية.
- أنشطة تمهيدية.
- الدرس.
- طرائق و تمارين محلولة.
- أعمال موجهة.
- استعد للبكالوريا.
- تمارين و مسائل.
- اختبر معلوماتك.

أردنا أن نجعل من هذا الكتاب وسيلة عمل ممتعة و ناجعة في آن واحد، نتمنى أن يسمح لكم من التحضير الجيد لامتحان نهاية السنة كما نرجو أن يكون حافزا لكم على مواصلة دراسات عليا.

و كون هذا العمل إنجازا بشريا فإنه لا يخلو من النقائص، و عليه فإننا نرحب، بكل اهتمام، بانتقادات القراء التي تهدف إلى إثراء و تحسين الكتاب و هم مشكورون مسبقا على ذلك.

elbassair.net

الفهرس

الأبواب	الصفحة
الباب1: المتتاليات	
الأنشطة	6
دروس و طرائق	8
أعمال موجهة	18
استعد للبكالوريا	20
تمارين	22
الباب2: الاستمرارية و النهايات	
الأنشطة	32
دروس و طرائق	34
أعمال موجهة	44
استعد للبكالوريا	46
تمارين	48
الباب3: الاشتقاقية	
الأنشطة	62
دروس و طرائق	64
أعمال موجهة	70
استعد للبكالوريا	72
تمارين	74
الباب4: الدوال الأصلية	
الأنشطة	88
دروس و طرائق	90
أعمال موجهة	94
استعد للبكالوريا	96
تمارين	98
الباب5: الحساب التكاملي	
الأنشطة	106
دروس و طرائق	108
أعمال موجهة	114
استعد للبكالوريا	116
تمارين	118

الأبواب	الصفحة
الباب6: الدالة اللوغاريتم النيبيري	
الأنشطة	128
دروس و طرائق	130
أعمال موجهة	138
استعد للبكالوريا	140
تمارين	142
الباب7: الدالة الأسية	
الأنشطة	158
دروس و طرائق	160
أعمال موجهة	168
استعد للبكالوريا	170
تمارين	172
الباب8: التزايد المقارن	
الأنشطة	184
دروس و طرائق	186
أعمال موجهة	194
استعد للبكالوريا	198
تمارين	200
الباب9: الإحصاء	
الأنشطة	212
دروس و طرائق	214
أعمال موجهة	218
استعد للبكالوريا	222
تمارين	224
الباب10: الاحتمالات	
الأنشطة	234
دروس و طرائق	236
أعمال موجهة	244
استعد للبكالوريا	246
تمارين	248

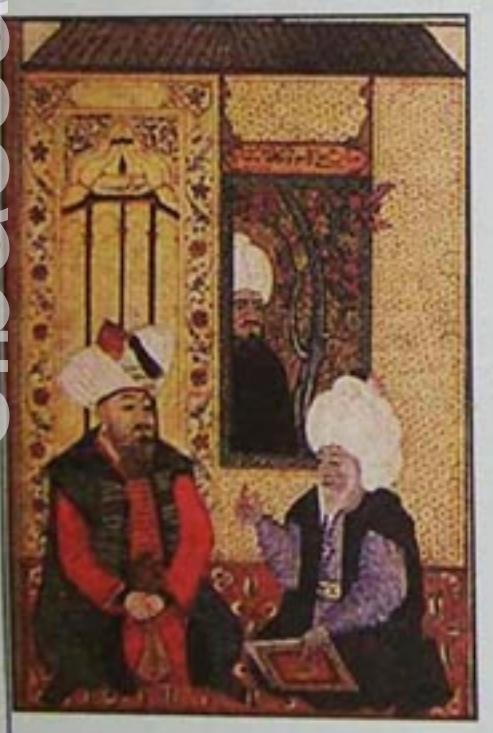
موقع عون البصائر التعليمي

elbassair.net

1 المتتاليات 1

الكفاءات المستهدفة

- تبيان أن متتالية محدودة من الأعلى، محدودة من الأسفل أو محدودة.
- التعرف إن كانت متتالية رتيبة.
- تبيان إن كانت متتالية متقاربة.
- التعرف على متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية $u_{n+1} = au_n + b$.
- البرهان بالتراجع على صحة خاصية في حالات بسيطة.



بن يحيى السموءل المغربي

ولد السموءل بالمغرب و قد نشأ في بيئة علمية ، فقد كان عمه طبيبا و كان والده من علماء الرياضيات ومن ثم فقد شجعه على دراستها. درس كتاب " الأصول "لإقليدس وكتاب " البديع في الجبر " للكرخي و كتب أخرى و عمل على إتمامها و تحسينها.
طور السموءل الطريقة التحليلية في علم الجبر، استطاع أن يؤلف كتابا في الرياضيات أطلق عليه " الباهر في الجبر" وهو في التاسعة عشرة من عمره " .
نذكر لك هنا مقطعا بسيطا مما ورد في هذا الكتاب في المقالة الثانية من الباب الرابع الخاص بصناعة العدد.

قال السموءل ".... و سنبرهن على ما قاله الكرجي و نصلحه بعد أن نقدم على ذلك مقدمات من أصول صناعة العدد القديمة بما لم يهتد إليه من انتهى إلينا خبره من المتقدمين.
لكن الله جلّ ثناؤه أظهر على أيدينا إذا كانت أعداد مبتدئة من الواحد متوالية على النظم الطبيعي فإن مجموع مربعاتها مساو لمجموع تلك الأعداد مع ضرب كل واحد منها في العدد الذي يليه قبله.
و يقصد السموءل – رحمه الله – المساواة التالية :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=2}^{n} i(i-1)$$

توفي السموءل المغربي حوالي عام 1174 م .

elbassair.net

النشاط الأول

يزداد عدد سكان مدينة A بـ 130 نسمة كل سنة في حين يزداد عدد سكان مدينة B بنسبة 2% من سنة إلى أخرى. في سنة 2005 بلغ عدد سكان كل مدينة من المدينتين A و B 6000 نسمة.

1. نمذجة الوضعية

نرمز بـ u_n إلى عدد سكان المدينة A و بـ v_n إلى عدد سكان المدينة B خلال السنة $2005+n$.

- عين u_0 و v_0 ثم أحسب u_1 و v_1.
- أوجد علاقة بين u_{n+1} و u_n. تحقق أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية يطلب تحديد أساسها r.
- عبر عن u_n بدلالة n.
- أوجد علاقة بين v_{n+1} و v_n. تحقق أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها q.
- عبر عن v_n بدلالة n.
- قارن بين عددي سكان المدينتين A و B في سنة 2010.

2. التخمين باستعمال مجدول أو حاسبة بيانية

- باستعمال حاسبة بيانية أحجز المتتاليتين (u_n) و (v_n) و ذلك باستعمال $(menu\ RECUR)$ بالنسبة للحاسبة $Casio$ و $(mode\ Seq)$ بالنسبة للحاسبة Ti.

n	u(n)	v(n)
3	6390	6367.2
4	6520	6494.6
5	6650	6624.5
6	6780	6757
7	6910	6892.1
8	7040	7030
9	7170	7170.6

n=9

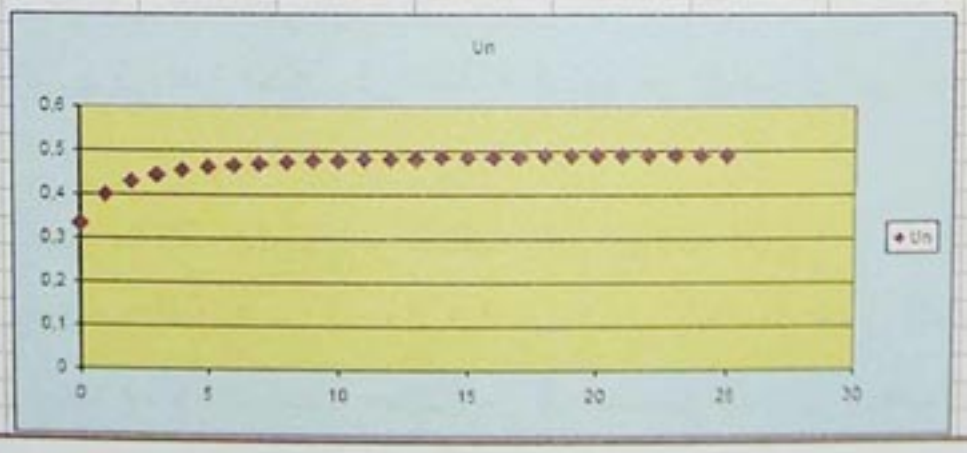
- أنجز جدولي المتتاليتين كما في الشكل المقابل.
- ابتداء من أي سنة يفوق عدد سكان المدينة B عدد سكان المدينة A ؟

النشاط الثاني

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام : $u_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$

1. أنجز ورقة الحساب أدناه بحجز في السطر 1 قيم n و في السطر 2 قيم u_n ثم أنشئ سحابة النقط المناسبة.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0,33333333	0,4	0,42857143	0,44444444	0,45454545	0,46153846	0,46666667	0,47058824	0,47368421	0,47619048	0,47826087



2. ضع تخمينات حول المتتالية (u_n).
3. أدرس إشارة كل من $u_n - \dfrac{1}{3}$ و $u_n - \dfrac{1}{2}$. ماذا تستنتج ؟
4. أدرس تغيرات الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+3}$ ثم شكل جدول تغيراتها.
5. هل تخميناتك صحيحة ؟

elbassair.net

النشاط الثالث

الجزء الأول: نهدف في هذا الجزء إلى حساب S_n مجموع n الأعداد الطبيعية الأولى الفردية:

$$S_n = 1+3+5+\ldots+(2n-1)$$

	A	B
1	1	1
2	3	4
3	5	9
4	7	
5		
6		
7		
8		
9		
10		

1. أحسب S_1، S_2 و S_3.
2. أنجز ورقة الحساب المقابلة بإتباع الخطوات التالية:

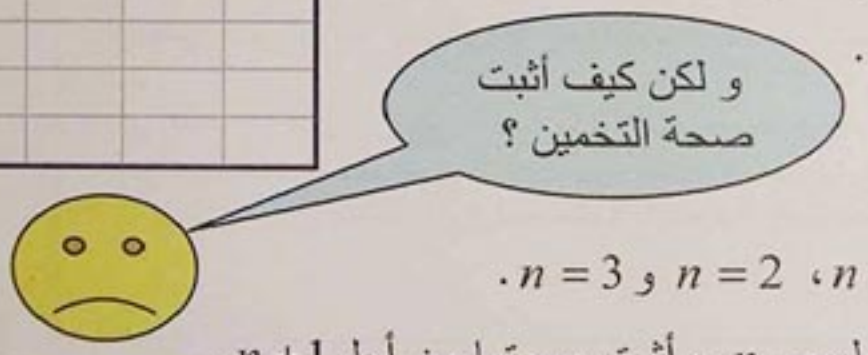
* أحجز في العمود A الأعداد الطبيعية الفردية الأولى.
* أحجز في الخلية $B1$ $\boxed{=SOMME(\$A\$1:A1)}$ و ذلك باستعمال الوظيفة $SOMME$ في مجدول اكسال.
* بعد تحديد الخلية $B1$ اسحب إلى الأسفل للحصول في كل مرة على المجموع S_n.

3. ماذا تلاحظ ؟ ضع تخمينا.
4. أثبت صحة تخمينك.

الجزء الثاني: نهدف في هذا الجزء إلى إيجاد خاصية $P(n)$ متعلقة بالعدد الطبيعي n يحققها المقداران α_n و β_n من خلال مقارنتهما حيث: $\alpha_n = 1+2+3+\ldots+n$ و $\beta_n = 1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$

	A	B	C	D
1	1	1	1	1
2	2	3	8	9
3	3	6	27	36
4	4		64	
5	5		125	
6				
7				
8				
9				
10				

1. أحسب α_n بدلالة n.
2. أنجز ورقة الحساب المقابلة بحجز الأعداد الطبيعية غير المعدومة الأولى في العمود A، حجز مجموعها في العمود B ، حجز مكعبات الأعداد الطبيعية غير المعدومة الأولى في العمود C و حجز مجموعها في العمود D.
3. ماذا تلاحظ ؟ ضع تخمينا حول الخاصية $P(n)$.



4. تحقق أن الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل $n=1$، $n=2$ و $n=3$.
5. بفرض الخاصية $P(n)$ صحيحة من أجل عدد طبيعي n ، أثبت صحتها من أجل $n+1$.
6. في رأيك هل أثبتت صحة التخمين ؟ ضع خلاصة.



نقول عن الخاصية $P(n)$ أنها وراثية.

النشاط الرابع

في أول جانفي 2000 أودع نبيل $10000\,DA$ ببنك يقترح فائدة مركبة نسبتها 5% سنويا. بالإضافة إلى ذلك فإنه يودع في كل أول جانفي من السنوات الموالية مبلغ $2000\,DA$. نرمز بـ u_n إلى رصيد نبيل أول جانفي من السنة $n+2000$.

1. عين u_0 ثم تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 1{,}05u_n + 2000$.
2. بين أن المتتالية (u_n) ليست لا حسابية و لا هندسية.
3. نضع من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n = u_n + 40000$

- بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $1{,}05$. أحسب u_n ثم v_n بدلالة n.
- كم يكون رصيد نبيل في سنة 2010 ؟

elbassair.net

المتتالية الحسابية- المتتالية الهندسية

1. المتتالية الحسابية

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r (r عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n+r$.

خاصية1: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p، $u_n=u_p+(n-p)r$.

حالات خاصة: $u_n=u_0+nr$ و $u_n=u_1+(n-1)r$.

خاصية2: إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن:

$$S=u_0+u_1+.....+u_{n-1}+u_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$$

بصفة عامة:

$$S=(\text{عدد الحدود})\times\frac{\text{الحد الأول}\ +\ \text{الحد الأخير}}{2}$$

خاصية3: تكون الأعداد a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا و فقط إذا كان $a+c=2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c.

2. المتتالية الهندسية

تعريف: نقول أن المتتالية (u_n)متتالية هندسية حدها الأول u_0 و أساسها q (q عدد حقيقي) إذا و فقط إذا كان أن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=u_n\times q$.

خاصية1: إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p، $u_n=u_p\times q^{n-p}$.

حالات خاصة: $u_n=u_0\times q^n$ و $u_n=u_1\times q^{n-1}$.

خاصية2: إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن:

$$S=u_0+u_1+.....+u_{n-1}+u_n=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

بصفة عامة:

$$S=(\text{الحد الأول})\times\frac{\text{الأساس أس عدد الحدود}\ -\ 1}{\text{الأساس}\ -\ 1}.$$

حالة خاصة: إذا كان $q=1$ فإن $S=u_0+u_1+.....+u_{n-1}+u_n=(n+1)u_0$.

خاصية3: تكون الأعداد غير المعدومة a، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا و فقط إذا كان $a\times c=b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

تمرين محلول1: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_n = -3n + 2$.

1. أحسب u_0 و u_1.
2. أثبت أن المتتالية (u_n) حسابية يطلب تعيين أساسها r.
3. أحسب، بدلالة n، المجموع $S = u_0 + u_1 + \ldots\ldots + u_n$.

طريقة: لإثبات أن (u_n) متتالية حسابية يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت r.

الحل:

1. $u_0 = -3(0) + 2 = 2$ و $u_1 = -3(1) + 2 = -1$.
2. لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} - u_n = \left[-3(n+1)+2\right] - \left[-3n+2\right] = -3$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $r = -3$.

3. لدينا: $S = (n+1) \times \frac{u_0 + u_n}{2} = (n+1) \times \frac{2 - 3n + 2}{2}$ و منه $S = \frac{(n+1)(4-3n)}{2}$.

تمرين محلول2: (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}^*$ حدها الأول $v_1 = 3$ و أساسها $q = 2$.

1. أحسب v_2 و v_3.
2. أحسب، بدلالة n، الحد العام v_n.
3. أحسب، بدلالة n، المجموع $S = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n$.

الحل:

1. $v_2 = v_1 \times q = 3 \times 2 = 6$ ، $v_3 = v_2 \times q = 6 \times 2 = 12$.
2. $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$.
3. $S = v_1 + v_2 + \ldots\ldots + v_n = v_1 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ و منه $S = 3 \times \frac{1-2^n}{1-2} = -3\left(1-2^n\right) = 3\left(2^n - 1\right)$.

تمرين محلول3: بلغ عدد سكان إحدى المدن الجزائرية 3000 نسمة سنة 2005 و 3630 نسمة سنة 2007.
نفرض أن α نسبة تزايد السكان سنويا بهذه المدينة ثابتة.

1. عين α نسبة تزايد سكان المدينة.
2. كم سيكون عدد سكان هذه المدينة سنة 2030 ؟ يتم تدوير النتيجة إلى العشرات.

طريقة: يتم نمذجة المقادير التي تتغير بنسبة ثابتة α بمتتالية هندسية أساسها $q = 1 + \alpha$.

الحل: لنرمز بـ u_n مثلا إلى عدد سكان المدينة السنة $2005 + n$ و منه $u_0 = 3000$ و $u_2 = 3630$.

1. بما أن نسبة التزايد α ثابتة فإن العلاقة بين عدد السكان خلال السنة $2005 + n$ وعدد السكان خلال السنة الموالية هي: $u_{n+1} = u_n + \alpha u_n$ أي $u_{n+1} = (1+\alpha)u_n$. نستنتج أن المتتالية (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1 + \alpha$.

لدينا إذن $u_2 = u_0 \times q^2$ و منه $q^2 = \frac{u_2}{u_0}$. نجد هكذا $q^2 = 1,21$ و بالتالي $q = 1,1$. نستنتج أن $\alpha = 0,1 = 10\%$.

2. نلاحظ أن $2005 + 25 = 2030$. لدينا $u_{25} = u_0 \times q^{25}$ و منه $u_{25} = 3000 \times (1,1)^{25}$ أي $u_{25} \approx 32504,12$.
يكون عدد سكان المدينة سنة 2030 حوالي 32500 نسمة.

elbassair.net

المتتاليات المحدودة و المتتاليات الرتيبة

1. المتتاليات المحدودة

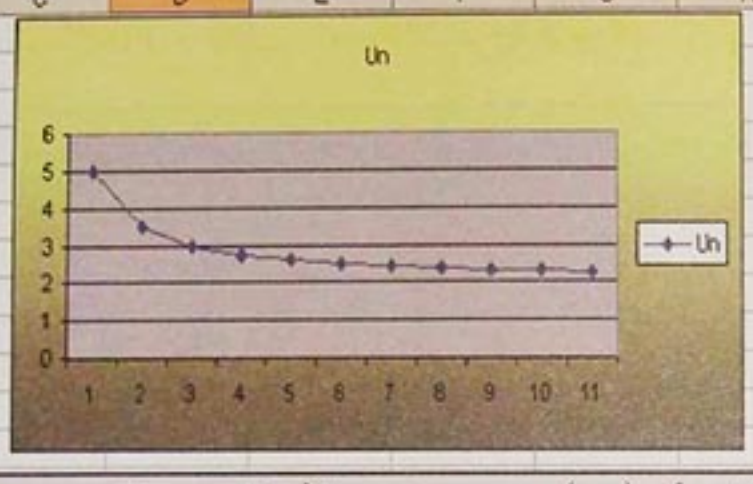
تعاريف: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$.

1. القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n \leq A$. نقول أن A عنصر حاد من الأعلى.
2. القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $B \leq u_n$. نقول أن B عنصر حاد من الأسفل.
3. القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل.

مثال: لتكن (u_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ:

$$u_n = 2 + \frac{3}{n}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	n	Un						
2	1	5						
3	2	3,5						
4	3	3						
5	4	2,75						
6	5	2,6						
7	6	2,5						
8	7	2,42857143						
9	8	2,375						
10	9	2,33333333						
11	10	2,3						
12	11	2,27272727						



من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $3 \leq \frac{3}{n}$ و منه $u_n \leq 5$

نستنتج أن (u_n) محدودة من الأعلى بـ 5.

من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $0 < \frac{3}{n}$ و منه $u_n > 2$. نستنتج أن (u_n) محدودة من الأسفل بـ 2.

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $2 < u_n \leq 5$. نستنتج أن المتتالية محدودة.

ملاحظة: العدد 5 عنصر حاد من الأعلى لـ (u_n) . كل عدد حقيقي A أكبر من 5 هو كذلك عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) (نفس الملاحظة بالنسبة للعنصر الحاد من الأسفل).

2. المتتاليات الرتيبة

تعاريف: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$.

1. القول عن (u_n) أنها متزايدة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} \geq u_n$.
2. القول عن (u_n) أنها متناقصة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} \leq u_n$.
3. القول عن (u_n) أنها ثابتة يعني أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n$.
4. القول عن (u_n) أنها رتيبة يعني أنها إما متزايدة و إما متناقصة.

ملاحظات:

* تبقى التعاريف السابقة صحيحة في حالة متتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ معرفة من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq n_0$.
* توجد متتاليات ليست متزايدة و ليست متناقصة. نقول عنها أنها غير رتيبة و نذكر على سبيل المثال المتتالية (u_n) المعرفة بحدها العام $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.
* تكون المتتالية (u_n) ثابتة إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي k بحيث من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n = k$.

elbassair.net

تمرين محلول1: لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام: $u_n=\dfrac{2n^2+1}{n^2+4}$.

أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2.

طريقة: لإثبات أن متتالية (u_n) محدودة بعدد حقيقي A يمكن المقارنة بين u_n و A بدراسة إشارة الفرق u_n-A.

الحل: $u_n-2=\dfrac{2n^2+1}{n^2+4}-2$ و منه $u_n-2=\dfrac{2n^2+1-2n^2-8}{n^2+4}$ أي $u_n-2=\dfrac{-7}{n^2+4}$

من أجل كل عدد طبيعي n : $\dfrac{-7}{n^2+4}<0$ و بالتالي من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n-2<0$ أي $u_n<2$.

إذن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2.

تمرين محلول2: لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام: $u_n=\dfrac{n^2+n+9}{n}$.

أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 7.

الحل: نجد بعد الحساب: $u_n-7=\dfrac{(n-3)^2}{n}$ و منه من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$، $u_n-7\geq 0$ أي $u_n\geq 7$.

نستنتج أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 7.

تمرين محلول3: أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام: $u_n=\dfrac{2n-1}{n+3}$.

طريقة: لدراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) يمكن أن ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ أو نقارن $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1 أو ندرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ في حالة متتالية حدها العام $u_n=f(n)$.

الحل: لتكن f الدالة المرفقة بالمتتالية (u_n) و المعرفة على $[0,+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0,+\infty[$ و لدينا: $f'(x)=\dfrac{2(x+3)-(2x-1)(1)}{(x+3)^2}=\dfrac{7}{(x+3)^2}$

من أجل كل x من $[0,+\infty[$، $f'(x)>0$ و منه f متزايدة تماما على المجال $[0,+\infty[$. نستنتج أن (u_n) متزايدة.

تمرين محلول4: أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $u_n=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{5}{6}\times\ldots\times\dfrac{2n-1}{2n}$

الحل: لنقارن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم بين $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\dfrac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)\times(2(n+1)-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times2n\times2(n+1)}}{\dfrac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times2n}}$$

و منه $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2(n+1)-1}{2(n+1)}=\dfrac{2n+1}{2n+2}$.

بما أن $2n+1<2n+2$ فإن $\dfrac{2n+1}{2n+2}<1$ و منه $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$.

و بما أن من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $u_n>0$ فإن $u_{n+1}<u_n$.

نستنتج هكذا أن المتتالية (u_n) متناقصة.

elbassair.net

نهاية متتالية

1. المتتاليات المتقاربة

لما تأخذ الحدود u_n لمتتالية (u_n) قيما قريبة بالقدر الذي نريد من عدد حقيقي l لما يأخذ العدد الطبيعي n قيما كبيرة بالقدر الكافي، نقول أن نهاية المتتالية (u_n) هي l لما يؤول n إلى $+\infty$ و أن المتتالية (u_n) متقاربة و تتقارب نحو l.

و نكتب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ أو $\lim u_n = l$

ملاحظات:

- ندرس دائما نهاية متتالية عند $+\infty$ و غالبا ما يطلب دراسة نهاية متتالية بدون التحديد عند $+\infty$.
- إذا لم تكن متتالية متقاربة نقول عنها أنها متباعدة.

مثال: لتكن (u_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ: $u_n = 3 - \frac{1}{n}$.

يمكن إثبات أن u_n يبقى قريب من 3 بالقدر الذي نريد بشرط أن يكون n كبيرا بالقدر الكافي. نستنتج أن المتتالية (u_n) تتقارب نحو العدد 3 و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.

2. المتتاليات ذات الحد العام $u_n = f(n)$

خاصية: يمثل α عددا حقيقيا، $-\infty$ أو $+\infty$. (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على المجال $[0;+\infty[$.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \alpha$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

ملاحظة: العمليات على النهايات الخاصة بالدوال تبقى صحيحة بالنسبة للمتتاليات.

مثال: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)=3$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3$.

3. الرتابة و التقارب

مبرهنة: (1) إذا كانت متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فإن هذه المتتالية متقاربة.

(2) إذا كانت متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فإن هذه المتتالية متقاربة.

ملاحظة: تسمح هذه المبرهنة بإثبات تقارب متتالية و لكن لا تعطي النهاية.

4. نهاية متتالية هندسية

مبرهنة: (1) إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

(2) إذا كان $q = 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.

(3) إذا كان $q > 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

(4) إذا كان $q \le -1$ فإنه ليس للمتتالية (q^n) نهاية.

أمثلة: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$، $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

تمرين محلول1: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $u_n = \frac{2n^2-5n+1}{n^2+5}$.

بين المتتالية (u_n) متقاربة.

الحل:

نلاحظ أن $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x) = \frac{2x^2-5x+1}{x^2+5}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

نستنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة و تتقارب نحو العدد 2 .

تمرين محلول2: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n كما يلي : $u_n = 2n + \frac{1}{n+2}$.

هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

الحل:

نلاحظ أن $u_n = f(n)$ حيث f هي الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x) = 2x + \frac{1}{x+2}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+2} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$. نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

و بالتالي فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

نستنتج أن المتتالية (u_n) غير متقاربة.

تمرين محلول3: (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{2}{3}$ و حدها الأول $u_0 = 2$.

نضع، من أجل كل عدد طبيعي n ، كما يلي : $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

4. عبر عن u_n بدلالة n ثم أدرس نهاية المتتالية (u_n).
5. عبر عن S_n بدلالة n ثم أدرس نهاية المتتالية (S_n).

الحل:

4. من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = u_0 \times q^n = 2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

بما أن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ و هكذا فإن المتتالية (u_n) متقاربة نحو 0.

5. من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 2\times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}$ ومنه $S_n = 6\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$.

بما أن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} = 0$. نستنتج أن $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 6$.

و هكذا فإن المتتالية (S_n) متقاربة نحو 6.

elbassair.net

تمرين محلول1: برهن بالتراجع، أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد n^3-n مضاعف للعدد 3.

الحل:

الخاصية " n^3-n مضاعف للعدد 3 " متعلقة بالعدد الطبيعي n . نستعمل الاستدلال بالتراجع.

المرحلة 1: من أجل $n=0$ ، $0^3-0=0=3\times 0$ و منه 0^3-0 مضاعف للعدد 3.

نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

المرحلة 2: نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 0$

أي: n^3-n مضاعف للعدد 3.

نضع $n^3-n=3k$ حيث k عدد طبيعي . و منه $n^3=3k+n$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $\left[(n+1)^3-(n+1)\right]$ مضاعف للعدد 3.

$$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+3n+1-n-1=(3k+n)+3n^2+2n$$

$$(n+1)^3-(n+1)=3k+3n^2+3n=3(k+n^2+n)$$

و بما أن $3(k+n^2+n)$ مضاعف للعدد 3 نستنتج أن $(n+1)^3-(n+1)$ مضاعف للعدد 3 .

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، n^3-n مضاعف للعدد 3 .

تمرين محلول2: (u_n) متتالية حدها الأول $u_0=4$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n-1$.

1. برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة.
2. برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2- .ما ذا تستنتج ؟

الحل:

1. البرهان على أن (u_n) متناقصة يؤول إلى إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_{n+1}\leq u_n$ $(u_{n+1}-u_n\leq 0)$.

المرحلة 1: لدينا $u_1=\frac{1}{2}\times 4-1=1$ و منه $u_1\leq u_0$. نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

المرحلة 2: نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 0$ أي $u_{n+1}\leq u_n$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+2}\leq u_{n+1}$.

لدينا $u_{n+1}\leq u_n$ و منه $\frac{1}{2}u_{n+1}-1\leq\frac{1}{2}u_n-1$ أي $u_{n+2}\leq u_{n+1}$ و منه فالخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}\leq u_n$. و منه المتتالية (u_n) متناقصة.

2. البرهان على أن (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2- يؤول إلى إثبات أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، $u_n\geq -2$.

المرحلة 1: لدينا $u_0=4$ و منه $u_0\geq -2$. نستنتج أن الخاصية صحيحة من أجل $n=0$.

المرحلة 2: نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 0$ أي $u_n\geq -2$

و نبرهن أن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ أي $u_{n+1}\geq -2$.

لدينا $u_n\geq -2$ و منه $\frac{1}{2}u_n-1\geq\frac{1}{2}(-2)-1$ أي $u_{n+1}\geq -2$ و منه فالخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n\geq -2$ و منه المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2- .

نستنتج من السؤالين السابقين أن المتتالية (u_n) متقاربة .

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

ـ دراسة المتتاليات من الشكل $u_{n+1}=au_n+b$ ($a\neq 0$)

(u_n) متتالية حدها الأول u_0 و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=au_n+b$ حيث a و b عددان حقيقيان و $a\neq 0$.

نلاحظ أن $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث f هي الدالة التآلفية: $x\mapsto ax+b$.

1. الحالة الأولى $a=1$

• من الواضح أن (u_n) متتالية حسابية أساسها b و لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=b$.

نستنتج أنه إذا كان $b<0$ تكون (u_n) متناقصة، إذا كان $b>0$ تكون (u_n) متزايدة وإذا كان $b=0$ تكون (u_n) ثابتة.

• لدينا $u_n=u_0+bn$ و منه إذا كان $b<0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ و إذا كان $b>0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

2. الحالة الثانية $a\neq 1$

• لدراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) ندرس إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ من أجل كل عدد طبيعي n.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}-u_n=(au_n+b)-(au_{n-1}+b)$ أي $u_{n+1}-u_n=a(u_n-u_{n-1})$.

نواصل بنفس الكيفية لنحصل هكذا على التوالي على المساويات التالية:

$$u_{n+1}-u_n=a(u_n-u_{n-1})$$
$$u_n-u_{n-1}=a(u_{n-1}-u_{n-2})$$
$$u_{n-1}-u_{n-2}=a(u_{n-2}-u_{n-3})$$
$$\dots$$
$$\dots$$
$$u_2-u_1=a(u_1-u_0)$$

نقوم بالضرب طرف في طرف و بعد عملية الاختزال نحصل على:

$$u_{n+1}-u_n=a^n(u_1-u_0)$$

* إذا كان $a>0$ أي إذا كانت الدالة f متزايدة تماما تكون المتتالية (u_n) رتيبة و إشارة الفرق u_1-u_0 هي التي تحدد ما إذا كانت المتتالية (u_n) متزايدة، متناقصة أو ثابتة.

* إذا كان $a<0$ أي إذا كانت الدالة f متناقصة تماما فإن a^n لا يحتفظ بإشارة ثابتة و منه الفرق $u_{n+1}-u_n$ لا يحتفظ بإشارة ثابتة.

نستنتج في هذه الحالة أن المتتالية (u_n) ليست رتيبة.

نتيجة: إذا كانت متتالية (u_n) تحقق العلاقة $u_{n+1}=f(u_n)$ و كانت الدالة f متزايدة تكون المتتالية (u_n) رتيبة و إشارة u_1-u_0 هي التي تحدد إذا كانت (u_n) متزايدة، متناقصة أو ثابتة.

• لدراسة تقارب (u_n) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحدها العام: $v_n=u_n-\dfrac{b}{1-a}$

من أجل كل عدد طبيعي n، $v_{n+1}=u_{n+1}-\dfrac{b}{1-a}=au_n+b-\dfrac{b}{1-a}=au_n-\dfrac{ab}{1-a}=a\left(u_n-\dfrac{b}{1-a}\right)=av_n$

و منه المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها a و حدها الأول v_0.

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=v_0\times a^n$ و بما أن $u_n=v_n+\dfrac{b}{1-a}$ فإن $u_n=v_0\times a^n+\dfrac{b}{1-a}$.

إذا كان $-1<a<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{b}{1-a}$. نستنتج أن (u_n) متقارب نحو $\dfrac{b}{1-a}$.

إذا كان $a>1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=+\infty$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$ أو $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=-\infty$ و ذلك حسب إشارة v_0.

إذا كان $a\leq -1$ فإنه ليس للمتتالية (a^n) نهاية و منه ليس للمتتالية (u_n) نهاية.

نستنتج أنه في الحالتين $a>1$ و $a\leq -1$ المتتالية ليست متقاربة.

elbassair.net

تمرين محلول: لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\alpha$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2$

أ) نفرض $\alpha=3$

1. أحسب u_1، u_2 و u_3. ضع تخمينا حول طبيعة المتتالية (u_n) ثم أثبت صحة تخمينك.
2. هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

ب) نفرض $\alpha=2$ و نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة: $v_n=u_n-3$.

1. أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
2. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n.
3. بين أن المتتالية (u_n) متقاربة محددا نهايتها.
4. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

ج) نفرض $\alpha=6$. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

الحل:

أ) $\alpha=3$ و منه $u_0=3$

1. نجد بعد الحساب: $u_1=3$ ، $u_2=3$ و $u_3=3$. يظهر أن المتتالية (u_n) ثابتة.

لنبين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n=3$.

* **المرحلة 1:** الخاصية صحيحة من أجل $n=0$ لأن $u_0=3$.

* **المرحلة 2:** نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي n حيث $n\geq 0$ أي $u_n=3$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$.

لدينا $u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2=\frac{1}{3}\times 3+2=3$ و منه $u_{n+1}=3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

* **الخلاصة:** نستنتج، حسب مبدأ البرهان بالتراجع، أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n. إذن (u_n) ثابتة.

2. نعم المتتالية (u_n) متقاربة و تتقارب نحو العدد 3.

ب) $\alpha=2$ و منه $u_0=2$

1. $v_{n+1}=u_{n+1}-3=\frac{1}{3}u_n+2-3=\frac{1}{3}u_n-1=\frac{1}{3}(u_n-3)$ و منه $v_{n+1}=\frac{1}{3}v_n$.

إذن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{3}$ و حدها الأول $v_0=-1$ $(v_0=u_0-3)$.

2. لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_n=v_0\times q^n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n$ و بما أن $u_n=v_n+3$ فإن $u_n=-\left(\frac{1}{3}\right)^n+3$.

3. بما أن $-1<\frac{1}{3}<1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0$ و منه $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=3$. نستنتج أن (u_n) متقاربة و تتقارب نحو 3.

4. نلاحظ أن $u_{n+1}=f(u_n)$ حيث $f:x\mapsto\frac{1}{3}x+2$. بما أن $\frac{1}{3}>0$ و $u_1-u_0>0$ $\left(u_1-u_0=\frac{2}{3}\right)$

فإن المتتالية (u_n) متزايدة.

ج) $\alpha=6$ و منه $u_0=6$.

بما أن $\frac{1}{3}>0$ و $u_1-u_0<0$ $(u_1-u_0=-2)$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

elbassair.net

موقع البصائر التعليمي

النمو الديموغرافي

في أول جانفي 2005، بلغ عدد سكان إحدى المدن 100 000 نسمة.

ملاحظة: (الفرعان 1 و2 مستقلان)

1. نفرض أن عدد سكان هذه المدينة يرتفع سنويا بنسبة قدرها 3% و نرمز بـ u_n إلى عدد سكانها في أول جانفي من السنة $2005+n$ حيث n عدد طبيعي.

- ما هي قيمة u_0 ؟ أحسب u_1 و u_2.
- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1,03\times u_n$. استنتج طبيعة المتتالية (u_n).
- عبر بدلالة n عن u_n.
- كم يكون عدد سكان المدينة في أول جانفي 2010 ؟ في أول جانفي 2025 ؟ (تدور النتائج).
- باستعمال حاسبة بيانية عين ابتداء من أي سنة يتجاوز عدد سكان هذه المدينة 200 000 نسمة ؟

2. نفرض أن عدد الوفيات هو نفسه عدد الولادات بهذه المدينة إلا أنه و نظرا لنشاطها الاقتصادي المتميز فإن 5000 شخص إضافي يستقرون بها سنويا.

نرمز بـ v_n إلى عدد سكانها في أول جانفي من السنة $2005+n$ حيث n عدد طبيعي.

- ما هي قيمة v_0 ؟ أحسب v_1 و v_2.
- عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n. استنتج طبيعة المتتالية (v_n).
- عبر بدلالة n عن u_n.
- كم يكون عدد سكان المدينة في أول جانفي 2010 ؟ في أول جانفي 2025 ؟ (تدور النتائج).
- ابتداء من أي سنة يتجاوز عدد سكان هذه المدينة 200 000 نسمة ؟

تطور نسبة الزبائن

بلغ عدد زبائن أحد مستوردي السيارات 1000 زبون خلال سنة 1999. لاحظ المستورد في السنة الموالية أنه احتفظ بنسبة 40% من زبائنه و أضيف إليهم، بفضل الإشهار، 630 زبون جديد.

نفرض أن تطور زبائن يتواصل بنفس الكيفية السابقة خلال السنوات العشر الموالية.

نرمز بـ u_n إلى عدد زبائن خلال السنة $1999+n$ حيث n عدد طبيعي.

1. أحسب u_1 و u_2.

2. عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n.

3. نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ $v_n=u_n-1050$.

- أحسب v_0، v_1 و v_2. خمن طبيعة المتتالية (v_n).
- بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها.
- عبر بدلالة n عن v_n ثم u_n.

4. ما هو عدد الزبائن المتوقع خلال سنة 2008 ؟ يتم تدوير النتيجة إلى العشرات.

5. باستعمال حاسبة بيانية، هل يظهر ممكنا بلوغ عدد زبناء هذا المستورد في سنة ما 1100 زبون إذا تواصل تطور الزبناء على نفس المنوال ؟

elbassair.net

تخمين عبارة الحد العام ثم إثباتها

دراسة مثال:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

- **تخمين عبارة u_n**

1. أنجز و أتمم ورقة الحساب الموالية و ذلك بإتباع الخطوات التالية:

- أحجز في السطر 1 الأعداد الطبيعية ابتداء من 0.
- أحجز في الخلية $B2$ العدد 0 و هو يمثل قيمة الحد الأول.
- أحجز في الخلية $C2$: $=2*B2+1$ و هو يمثل قيمة الحد الثاني.
- حدد الخلية $C2$ ثم اسحب إلى اليمين.
- أحجز في الخلية $B3$: $B2+1$ للحصول على u_n+1 و ليس u_{n+1}.
- حدد الخلية $B3$ ثم اسحب إلى اليمين.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Un	0	1	3											
Un+1	1	2												

ملاحظة: يمكنك استعمال حاسبة بيانية عوض مجدول.

2. خمن عبارة $u_n + 1$ بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

- **إثبات صحة التخمين**

* **الطريقة الأولى: استعمال الاستدلال بالتراجع**

أثبت باستعمال البرهان بالتراجع تخمينك الخاص بعبارة u_n بدلالة n.

* **الطريقة الثانية: استعمال متتالية مساعدة**

نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = u_n + 1$.

3. بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.

4. أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

5. قارن مع تخمينك.

تطبيق:

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_0 = 6$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = 3u_n - 10$.

1. أنجز و أتمم ورقة الحساب الموالية و ذلك بإتباع نفس الخطوات السابقة:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Un	6	8									
Un-5											

2. خمن عبارة $u_n - 5$ بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3. اثبت صحة تخمينك بإتباع طريقتين مختلفتين.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

موضوع محلول

في 1 جانفي 2001 أودع زكرياء رصيد $10000\,DA$ ببنك يقدم فوائد مركبة نسبتها 5% سنويا إلا أن مصاريف تنقله إلى الجامعة تفرض عليه سحب مبلغ $1500\,DA$ في نهاية كل سنة (بعد حساب الفوائد).

نرمز بـ u_n إلى رصيد زكرياء في أول جانفي من السنة $2001+n$.

1. عين u_0 ثم احسب u_1. كم كان رصيد زكرياء في أول جانفي 2003 ؟
2. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=1,05u_n-1500$.
3. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).
4. نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n، $v_n=u_n-30000$.
   - بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول.
   - ما هي نهاية المتتالية (u_n) ؟
5. ابتداء من أي سنة يكون رصيد زكرياء دائنا ؟

حل مختصر

1) $u_0=10000$ ، $u_1=9000$

u_2 هو رصيد زكرياء في أول جانفي 2003 .

$u_2=u_1+\frac{5}{100}\times u_1-1500$ و منه $u_2=7950$

2) $u_{n+1}=u_n+\frac{5}{100}\times u_n-1500$

و منه $u_{n+1}=1,05u_n-1500$

3) نلاحظ أن $u_{n+1}=f(u_n)$ ، $f(x)=1,05x-1500$

f متزايدة و منه المتتالية (u_n) رتيبة. و بما أن $u_1-u_0<0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة.

4)

- $v_{n+1}=u_{n+1}-30000=1,05u_n-31500$

و منه $v_{n+1}=1,05(u_n-30000)$ أي $v_{n+1}=1,05v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=1,05$

و حدها الأول $v_0=-20000$.

- لدينا $v_n=v_0q^n=-2\times10^4\times(1,05)^n$.

بما أن $u_n=v_n+30000$

فإن $u_n=-2\times10^4\times(1,05)^n+3\times10^4$ و منه $\lim u_n=-\infty$

5) لدينا $u_8=540,89$ و $u_9=-1027$

و بما أن u_9 هو رصيد زكرياء في 2010/01/01 فإن رصيده يكون دائنا ابتداء من سنة 2010 .

تعاليق

- u_0 هو رصيد زكرياء في 2001/01/01.
- $u_1=u_0+\frac{5}{100}\times u_0-1500$.
- $u_1-u_0=-1000$
- أنظر نتيجة الدرس المتعلقة بدراسة المتتالية $u_{n+1}=au_n+b$.
- $v_0=u_0-30000$.
- لحساب نهاية المتتالية (u_n) نقوم هنا بحساب u_n بدلالة n و هذا مرورا بحساب v_n.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(1,05)^n=+\infty$ لأن $1,05>1$.
- يمكن الاستعانة بحاسبة بيانية.

elbassair.net

استعد للباكالوريا

موضوع مع إرشادات

في أول جانفي 2005 بلغ عدد عمال إحدى المؤسسات 1500 عاملا. أثبتت دراسة أنه خلال كل سنة من السنوات القادمة سيحال 10% من العمال على التقاعد و بهدف تعديل عدد عمالها مع احتياجاتها، توظف المؤسسة خلال السنة 100 شاب.

من أجل كل عدد طبيعي n، نرمز بـ u_n إلى عدد عمال المؤسسة في أول جانفي من السنة $2005+n$.

أجب بصحيح أو خاطئ بوضع العلامة× في الخانة المناسبة مع تبرير اختيارك.

1. في أول جانفي 2006 بلغ عدد عمال المؤسسة 1450 عاملا.	صحيح ☐ خاطئ ☐
2. المتتالية (u_n) متتالية هندسية.	صحيح ☐ خاطئ ☐
3. من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1}=0,9u_n+100$.	صحيح ☐ خاطئ ☐
4. من أجل كل عدد طبيعي n، المتتالية (v_n) حيث $v_n=u_n-1000$ متتالية هندسية.	صحيح ☐ خاطئ ☐
5. من أجل كل عدد طبيعي n، $v_n=500\times(0,9)^n$.	صحيح ☐ خاطئ ☐
6. من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n=500\times(0,9)^n-1000$.	صحيح ☐ خاطئ ☐
7. يرتفع عدد عمال المؤسسة من سنة إلى أخرى.	صحيح ☐ خاطئ ☐
8. لن يقل أبدا عدد عمال المؤسسة عن 500.	صحيح ☐ خاطئ ☐

إرشادات

1. يتم حساب u_1 انطلاقا من u_0.
2. استعمل تعريف أو خواص المتتالية الهندسية.
3. لاحظ العلاقة بين الأجوبة المقترحة في السؤالين2 و 3. هل اختياراتك في هاتين الحالتين متجانستين ؟
4. عبر عن v_{n+1} بدلالة v_n.
5. استعمل عبارة الحد العام لمتتالية هندسية.
6. استنتج عبارة u_n انطلاقا من عبارة v_n باستعمال العلاقة $v_n=u_n-1000$.
7. اربط الجواب المقترح باتجاه تغير المتتالية (u_n).
8. استعمل اتجاه تغير المتتالية (u_n) و نهايتها.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

تمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ تذكير حول المتتاليات العددية .

1 جد الأعداد الناقصة في كل من المتتاليات المنتهية التالية ؛ ثمّ أكتب علاقة تربط بين الحدود .

أ ـ 0 ؛ 5 ؛ 3 ؛ 8 ؛ 6 ؛ 11 ؛ ؟ ؛ 14 ؛ 12 .

ب ـ 2− ؛ 1 ؛ 7 ؛ 19 ؛ 43 ؛ 91 ؛ ؟ .

جـ ـ 2 ؛ 5 ؛ $\frac{7}{2}$ ؛ $\frac{17}{4}$ ؛ $\frac{31}{8}$ ؛ $\frac{65}{16}$ ؛ $\frac{127}{32}$ ؛ ؟ .

2 (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = 70$ وأساسها 5− . أحسب $S = u_0 + u_1 + ... + u_{13}$.

3 (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_1 = -\frac{3}{2}$ وأساسها $\frac{3}{2}$. أحسب $S = u_0 + u_1 + ... + u_{13}$.

4 (u_n) متتالية حسابية أساسها r . (v_n) و (w_n) متتاليتان معرفتان من أجل كل عدد طبيعي n على الترتيب بـ : $v_n = 3u_n - 1$ و $w_n = u_{2n} + 3$.

بين أن المتتاليتين (v_n) و (w_n) حسابيتان مطلوب تعيين الأساس لكل منهما .

5 أحسب المجموع $S = u_0 + u_1 + ... + u_{10}$ علما أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{2^n}{3}$.

6 أحسب المجموعين التاليين :

$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ... + \frac{1}{59049}$ ؛

$S = 1 + 2 + 4 + ... + 16384$.

7 أدرس اتجاه التغيّر المتتاليات المعرفة بالحد العام u_n في كل من الحالات المقترحة أدناه :

أ ـ $u_n = \frac{1}{2}n + 3,5$ ؛ ب ـ $u_n = -\frac{1}{3}n + 5$ ؛

جـ ـ $u_n = 4 - 3n$ ؛ د ـ $u_n = \frac{n}{5} - 2$.

8 أدرس اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ بحدها العام v_n .

أ ـ $v_n = 2 \times 3^n$ ؛ ب ـ $v_n = \frac{2^n}{3}$ ؛

جـ ـ $v_n = -\frac{4}{5^n}$ ؛ د ـ $v_n = -\frac{2^{n+2}}{3^n}$.

2 ـ المتتاليات المحدودة .

9 نعتبر الدالة f المعرّفة على $[0; +\infty[$ حيث جدول تغيّراتها هو كالتالي :

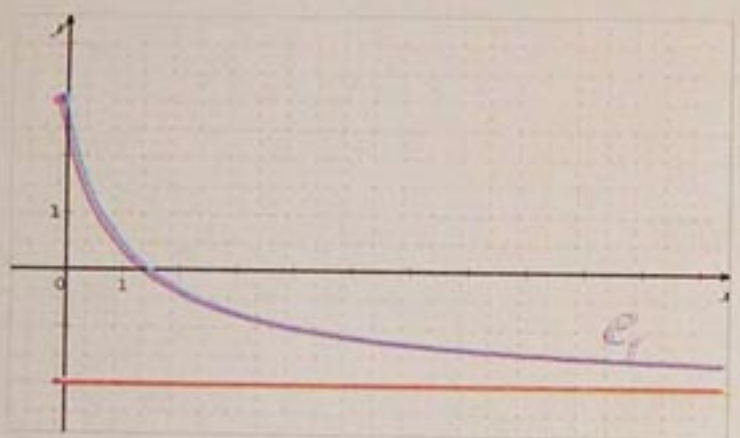
x	0	3	$+\infty$
$f(x)$	-1	↗ 3	↘ 0

لتكن المتتالية (u_n) حيث $u_n = f(n)$.

أ ـ عيّن الحد الأول u_0 .

ب ـ برّر أنّ المتتالية (u_n) محدودة .

10 لتكن f دالة معرّفة على $[0; +\infty[$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس .



لتكن المتتالية (u_n) حيث $u_n = f(n)$.

باستعمال التمثيل البياني :

أ ـ عيّن الحد الأول u_0 .

ب ـ برّر أنّ المتتالية (u_n) محدودة .

11 نعتبر الدالة f المعرّفة على $[0; +\infty[$ بـ : $f(x) = x^2 - 2x$.

لتكن المتتالية (u_n) حيث $u_n = f(n)$.

أ ـ شكل جدول تغيّرات الدالة f .

ب ـ بيّن أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل .

جـ ـ هل المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى ؟

12 نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + 2$.

بيّن أنّ هذه المتتالية محدودة .

elbassair.net

13 بيّن أنّ المتتالية (u_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = \frac{1}{2}n + 3,5$ هي محدودة من الأسفل . هل هي محدودة من الأعلى ؟

14 بيّن أنّ المتتالية (u_n) المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ : $u_n = 4 - 3n$ هي محدودة من الأعلى . هل هي محدودة من الأسفل ؟

3 ـ اتجاه تغير ورتابة متتالية .

15 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :

$u_n = \frac{1-n^2}{n}$.

1) أدرس إشارة العبارة $u_{n+1} - u_n$ ، استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) أعط دالة f تحقق $u_n = f(n)$. باستعمال اتجاه تغير الدالة f تحقق من النتيجة المحصل عليها في السؤال السابق .

16 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :

$u_n = \frac{-2n^2 + 3n + 1}{n}$.

1) أدرس إشارة العبارة $u_{n+1} - u_n$ ، استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2) أعط دالة f تحقق $u_n = f(n)$. باستعمال اتجاه تغير الدالة f تحقق من النتيجة المحصل عليها في السؤال السابق .

17 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$u_n = -3n^2 - 3n + \frac{5}{4}$

أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) باستعمال التعريف ثم باستعمال الدالة المرفقة لها .

18 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_n = \frac{4^n}{n^2}$.

1) أحسب العبارة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2) برهن أن المتتالية (u_n) متزايدة .

19 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ $u_n = \frac{2^n}{n^2}$

1) برر أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $u_n > 0$

2) أثبت أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن $n^2 - 2n - 1 > 0$ ،

3) احسب العبارة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. استنتج أنه ابتداء من الحد الثالث تكون المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

20 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

أ ـ $u_n = \frac{1-n}{2n+1}$ ؛

ب ـ $u_n = \frac{0,75^n}{n^3}$ حيث $n \geq 1$ ؛

ج ـ $u_n = n^2 + 2n + 5$ ؛

21 نفس المطلوب للتمرين السابق .

أ ـ $u_n = \frac{2}{n^2 + 2n + 5}$ ؛ ب ـ $u_n = (-3)^n$ ؛

ج ـ $u_n = 2^n - 4$.

4 ـ تقارب متتالية .

في التمارين من 22 إلى 26 المطلوب تعيين نهاية المتتالية (u_n) .

22 أ ـ $u_n = 3 - \frac{2}{2n+5}$ ؛

ب ـ $u_n = 1 - 2n + \frac{3}{n^2+1}$ ؛

ج ـ $u_n = \frac{n^2 - 3n + 2}{n+5}$ ؛ د ـ $u_n = \frac{2-n^2}{2n^2+3}$.

23 أ ـ $u_n = 3(1,2^n - 1)$ ؛

ب ـ $u_n = n - \left(\frac{4}{3}\right)^n$ ؛

ج ـ $u_n = 2 - 5(0,75)^n$ ؛ د ـ $u_n = 2n + 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

24 أ ـ $u_n = 5\left(\frac{1}{4}\right)^n + 100\left(-\frac{3}{4}\right)^n$ ؛

ب ـ $u_n = (-2)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ؛

elbassair.net

تمارين

ج - $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{98}{100}\right)^n$.

25 أ - $u_n = 2\times 3^n$ ؛ ب - $u_n = \frac{n+1}{n+1}$ ؛

جـ - $u_n = \frac{3^n}{5^n}$ ؛ د - $u_n = \frac{n+1}{n^2+1}$.

26 أ - $u_n = \frac{1}{2n+1} + 2^{1-n}$ ؛ ب - $u_n = \frac{3^{0,5n+3}}{n^2+4}$ ؛

جـ - $u_n = \frac{3^n}{2\times 3^n+1}$ ؛ د - $u_n = 3n+1-2^{-0,1n}$.

27 نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ : $3^n u_n = 2^n$.

1) برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

2) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

28 نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :

$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

1) أ - عيّن اتّجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

ب - عيّن إشارة u_n .

جـ - هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

2) نضع $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$.

أحسب S_n بدلالة n ، ثمّ أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

5 - الاستدلال بالتراجع .

29 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

30 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

31 برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا :

$1+2^3+3^3+\ldots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

32 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ : $u_0 = 4$

و $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لدينا :

أ) $u_n > 1$. ب) $u_{n+1} \le \frac{3}{2}$.

33 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 3$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

أثبت أن المتتالية (u_n) ثابتة .

34 لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 0,5$ و $u_{n+1} = (u_n)^2$.

1) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 < u_n < 1$ ،

2) استنتج تغيرات المتتالية (u_n) .

35 أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $2^{3n}-1$ مضاعف للعدد 7 .

36 أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n}-1$ مضاعف للعدد 8 .

37 أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $3^{2n+1}-2^{2n+2}$ مضاعف للعدد 7 .

تمارين للتعمق

1 - تذكير حول المتتاليات العددية .

38 في أول يناير 2000 وضع أحمد $500\,DA$ في بنك بدون فوائد ، ثم في أول كل شهر بانتظام ، أضاف $50DA$ زيادة على المبلغ المدفوع في الشهر السابق .

نسمي u_1 المبلغ مقدرا بالدينار لأول دفع و u_n المبلغ المدفوع في الشهر رقم n .

1) أكتب u_n بدلالة n .

2) ما هو المبلغ الذي يضعه أحمد في أول ديسمبر 2007 ؟

3) ما هو المبلغ الذي جمعه أحمد في رصيده إلى غاية 31 ديسمبر 2007 ؟

39 يوجد بمحطة توزيع البنزين $32000\,L$ من البنزين يريد صاحب المحطة توزيع هذه الكمية خلال 10 أيام .

باع في اليوم الأول $5000\,L$ ثم قرر أن ينقص من البيع في كل يوم نفس الكمية .

ما هي الكمية التي يجب تخفيضها يوميا حتى لا يوجد بنزين بعد 10 أيام ؟

elbassair.net

40 عدد السكان لبلد في سنة 1990 هو 45,4 مليون نسمة ؛ انتقل إلى 52,6 مليون نسمة في سنة 2002 نسمي v_0 عدد السكان في 1990 و v_n عدد السكان بعد n سنة . نفرض أن عدد السكان يتزايد كل سنة بتزايد ثابت r .

1) أحسب التزايد r .

2) ما هو عدد السكان هذا البلد في عام 2020 ؟

41 تعاقد أحمد مع بنك لقرض مبالغ مالية لمدة 10 سنوات ، في السنة الأولى يقرض $9000\,DA$ شهريا ثم يزيد القرض فكل سنة بنسبة 3% . نسمي u_n المبلغ الذي يقرضه أحمد شهريا في السنة n .

1) ما هو المبلغ المقترض شهريا في السنة الثانية ؟

2) بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب أساسها .

3) كم يصبح المبلغ المقترض شهريا في السنة العاشرة ؟

4) ما هو المبلغ الكلي الذي اقترضه أحمد خلال العشر سنوات ؟

42 السعر p_0 لبضاعة في تزايد بنسبة 5% سنويا .

1) أحسب p_1 سعر البضاعة خلال سنة ، و p_2 سعرها خلال سنتين ، و p_n سعرها خلال n سنة ، بدلالة p_0 .

2) خلال كم سنة يصبح سعر البضاعة أكثر من الضعف ؟

43 في سنة 2000 كان عدد سكان قرية 526 نسمة ، ولأسباب معينة بدأ يتقلص بنسبة 2% في كل سنة .

نضع : $u_0 = 526$ ، u_1 عدد السكان لسنة 2001 و u_n عدد السكان هذه القرية بعد n سنة.

1) أحسب u_1 و u_2 .

2) عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n من أجل n عدد طبيعي .
استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) ما هو عدد سكان هذه القرية في سنة 2009 ؟

4) ما هي السنة التي يصبح فيها عدد السكان أقل من النصف ؟

5) أحسب u_{310} ، u_{311} أعط تفسيرا للنتيجتين .
ابتداء من أي سنة تصبح القرية فارغة من السكان ؟
تعطى النتائج مقربة إلى عدد طبيعي.

44 يقترح أحمد على عمر عقدين لكراء مسكن لمدة 8 سنوات . يدفع عمر $5000\,DA$ في السنة الأولى

1) في العقد الأول ، ثمن الكراء يزداد كل سنة بقيمة ثابتة $150\,DA$.

نضع u_n ثمن الكراء للسنة n .

أ) أحسب الثمن u_2 .

ب) أكتب u_n بدلالة n ثم أحسب u_8 .

ت) أحسب ثمن الكراء لثماني سنوات.

2) في العقد الثاني ثمن الكراء يزداد كل سنة بنسبة 3% .

نضع v_n ثمن الكراء للسنة n .

أ) أحسب الثمن v_2 .

ب) أكتب v_n بدلالة n ثم أحسب v_8.

ت) أحسب ثمن الكراء لثماني سنوات .

3) ما هو العقد الذي يختاره عمر .

45 تحتوي ثانوية على 1500 تلميذ موزعين كالتالي :
500 تلميذ في السنة الأولى ، 500 تلميذ في السنة الثانية و500 تلميذ في النهائي .

نفرض أن كل تلميذ يبقى عاما واحدا في كل مستوى ويقضي ثلاث سنوات في الثانوية فقط.

إذا كانت هذه الثانوية تستقبل في كل سنة 20 تلميذ جديد في السنة الأولى ، بعد كم سنة يكون عدد التلاميذ في هذه الثانوية ، 2000 تلميذ .

2 - المتتاليات المحدودة .

46 أذكر إن كانت المتتالية (u_n) تقبل عنصرا حادا من الأسفل ،عنصرا حادا من الأعلى . هل هي محدودة ؟

أ- $u_n = 1 + \dfrac{1}{n+2}$. ب- $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$.

جـ- $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$. د- $u_n = \dfrac{1}{1+n^2}$

47 1) أنجز جدول تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :
$f(x) = x^2 - 5x + 6$.

2) أثبت أن العدد $\dfrac{1}{2}$ هو عنصر حاد من الأعلى للمتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 4 بـ : $u_n = \dfrac{1}{n^2 - 5n + 6}$.

elbassair.net

48 نعتبر المتتالية (u_n) ذات الحد العام $u_n=\dfrac{n-1}{2n-5}$ مع $n\geq 1$. ولتكن الدالة f المعرّفة على $]3;+\infty[$ بـ :

$f(x)=\dfrac{x-1}{2x-5}$.

1) أ - أدرس تغيرات الدالة f واستنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]3;+\infty[$ ، $f(x)\leq 2$.

ب - نضع $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$. عبّر عن $f(x)-l$ بدلالة x استنتج أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]3;+\infty[$ ، $f(x)\geq l$.

جـ - أنشئ المنحنى $\mathscr{C}$ للدالة f في معلم متعامد حيث تؤخذ وحدة الرسم $1cm$ على الفواصل و $4cm$ على التراتيب .

2) أ - مثّل المتتالية (u_n) في المعلم السابق .

ب - استنتج من دراسة الدالة f أنّ المتتالية (u_n) محدودة.

49 لتكن (u_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_n=\dfrac{8n}{n^2+4}$

1) برهن أنّ المتتالية (u_n) محدودة بالعددين 0 و 2 .

2) نعتبر (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n=\dfrac{u_n}{u_n-3}$

أ - تحقق من أنّ $v_n=1+\dfrac{3}{u_n-3}$.

ب - باستعمال الدوال المرجعية برهن أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $-2\leq v_n\leq 0$ علما أنّ $u_n\in[0;2]$.

50 نعتبر المتتالية (u_n) حيث $u_0=2$ و $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_0^{\,2}}$.

1) أ - برّر أنّ (u_n) متتالية هندسية .

ب - استنتج عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

جـ - ما هو اتّجاه تغير المتتالية (u_n) ؟

2) برهن أنّ المتتالية (u_n) محدودة بـ : 0 و 2 .

3 - اتجاه تغير ورتابة متتالية .

51 في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه ، أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

أ - $u_n=2-1,1^n$ ؛ ب - $u_n=2^{1-n}$ ؛

جـ - $u_n=3-\dfrac{1}{n}$ حيث $n\geq 1$.

52 نفس المطلوب للتمرين السابق .

أ - $u_n=n^2+n+1$ ؛ ب - $u_n=\dfrac{1}{2+n}$ ؛

جـ - $u_n=\dfrac{3}{5}(2)^{n+2}-4$.

53 1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 للمتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=2$ و $u_{n+1}=0,9u_n-13$.

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n).

54 أجب على نفس الأسئلة للتمرين السابق مع $u_0=2$ و $u_{n+1}=3u_n-1$.

55 a عدد حقيقي كيفي . نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=a$ و $u_{n+1}=2,5u_n-1,5$. بين أنه:

أ ــ إذا كان $a=0$ فإن المتتالية (u_n) تكون متناقصة.

ب ــ إذا كان $a=1$ فإن المتتالية (u_n) تكون ثابتة.

ج ــ إذا كان $a=2$ فإن المتتالية (u_n) تكون متزايدة.

56 (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $u_n=\dfrac{3^n}{n+2}$.

1) أحسب قيم الحدود الخمسة الأولى .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_n>0$.

3) أدرس إشارة $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-1$.

4) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4 - تقارب متتالية .

في التمرينين 57 و 58 المطلوب تعيين نهاية المتتالية (v_n).

57 أ - $v_n=\dfrac{2u_n-1}{1-u_n}$ مع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ و $u_n\neq 1$.

ب - $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n^{\,2}+1}$ مع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

58 أ - $v_n=\dfrac{1}{2u_n^{\,2}+1}$ مع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

ب - $v_n=u_n^{\,2}+2u_n+5$ مع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

جـ - $v_n=\dfrac{1}{u_n+2}$ مع $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-2$ و $u_n>2$.

elbassair.net

59 احتمال التوفيق في لعبة هو 0,7 .

1) بيّن أنّ احتمال التوفيق على الأقل مرّة من خلال n لعبة هو $p_n = 1-0,3^n$ مع $n \geq 1$.

2) عيّن اتّجاه تغيّر المتتالية (p_n) ونهايتها .

3) عيّن أصغر عدد طبيعي n بحيث الاحتمال p_n يتجاوز 0,999 .

60 كان إنتاج مؤسسة 2000 قطعة في أوّل سنة والإنتاج يتزايد بـ 4% سنويا .

1) أ - أحسب الإنتاج للسنة الرابعة .

ب - بفرض u_n الإنتاج للسنة n . عبّر عن u_n بدلالة n.

جـ - أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2) أ - عيّن الإنتاج الكلّي (المجمّع) للسنوات الأربع الأخيرة

ب - عبّر عن الإنتاج الكلّي p_n من خلال n سنة بدلالة n.

جـ - ما هي نهاية p_n ؟

د - عيّن السنة n التي من أجلها يتجاوز 40000 .

5 - الاستدلال بالتراجع .

61 بكالوريا

نضع $s_n = 1^2+2^2+3^2+...+n^2$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

1) أ - أحسب s_1 ، s_2 ، s_3 و s_4 .

ب - عبر عن s_{n+1} بدلالة s_n .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم

$$s_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

62 من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ، نضع :

$$s_n = 1+2\times2+3\times2^2+4\times2^3+...+(n-1)2^{n-2}$$

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 2$ ،

$$s_n = (n-1)2^n - n\times2^{n-1}+1 = 1+\left(\frac{1}{2}n-1\right)2^n$$

63 أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 4 لدينا : $2^n \geq n^2$.

64 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ، $5^n \geq 4^n+3^n$.

65 1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 ، $3n^2 \geq (n+1)^2$.

2) نسمي P_n الخاصية : " $3^n \geq 2^n+5n^2$ " .

أ ــ ما هو أصغر عدد طبيعي غير معدوم n الذي من أجله تكون الخاصية P_n صحيحة ؟

ب ــ برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 5 ، تكون الخاصية P_n صحيحة .

66 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 1$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$.

1) أحسب الحدود u_1 ، u_2 ، u_3 ؛ أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n .

2) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

67 الهدف التعبير عن u_n بدلالة n .

المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 7$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 10u_n - 18$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5 .

لاحظ النتائج هي أعداد تتكون من أرقام وسطها أسفار ؛ أعط العلاقة بين عدد الأسفار و n .

2) أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n ، ثم برهن بالتراجع هذا التخمين .

68 (u_n) متتالية معرفة بـ $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = 4-u_n$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ، u_4 و u_5. أعط تخمينا لعبارة u_n بدلالة n.

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{2n} = 3$ و $u_{2n+1} = 1$.

69 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نضع ، $s_n = 1+3+5+...+(2n-1)$.

elbassair.net

تمارين

1) أحسب s_1 ، s_2 ، s_3 و s_4 . أعط تخمينا لعبارة s_n بدلالة n.

2) برهن هذا التخمين بالتراجع .

3) لاحظ المجموع s_n وأعط برهانا آخرا للتخمين .

70 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + 2$.

(v_n) المتتالية المعرفة بـ $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = v_n + u_n$.

1) عبر عن u_n بدلالة n .

2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 1 + n^2$.

71 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1) أدرس رتابة المتتالية (u_n) .

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > n^2$.

72 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 \in]0;1[$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 < u_n < 1$.

73 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n،

$0 \le u_n \le 2$.

أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة ماما .

74 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $u_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n، $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$.

1) تحقق من أن الحدود u_1 ، u_2 و u_3 تنتمي إلى المجال $[0;4]$.

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $0 \le u_n < 4$.

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

75 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = 0,6\,u_n - 1,2$.

1) برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

2) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n > -3$.

76 (u_n) المتتالية المعرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 3}$.

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \le u_n \le 1$.

2) برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

77 من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم نضع :

$u_n = n \times 2^{n-1}$.

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n،

$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1 + (n-1)2^n$.

78 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ :

$u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم لدينا :

$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \dfrac{n}{n+1}$.

79 المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. برهن أن :

أ - من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > -1$.

ب - المتتالية (u_n) رتيبة .

جـ - من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \ge \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

80 أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) المعرفة بـ :

$$\begin{cases} u_0 = 0,9 \\ u_{n+1} = u_n^{\,2} \end{cases}$$

5 - المتتاليات التراجعية من الشكل $u_{n+1} = a\,u_n + b$.

81 لتكن المتتالية (u_n) المعرّفة بـ $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n - 1)$.

1) عيّن الحدّ الأول u_0 حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة .

2) نضع $u_0 = 4$ و $v_n = 2u_n + 1$.

أ - برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها وحدّها الأول v_0.

elbassair.net

ب - استنتج v_n بدلالة n ، ثمّ u_n .

جـ - عين نهاية المتتالية (u_n).

82 نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ :

$u_0 = 1$ و $u_{n+1} = \frac{3u_n}{4} + 2$.

1) أرسم المستقيمين $\mathcal{D}$ ذي المعادلة $y = \frac{3}{4}x + 2$ و Δ ذي المعادلة $y = x$ في معلم متعامد ومتجانس . عيّن A نقطة تقاطعهما ولتكن α فاصلة النقطة A.

2) أ - أحسب u_1 ، u_2 و u_3 ثم مثّل هذه الحدود على محور الفواصل .

ب - أنشئ هندسيا الحدّين u_4 و u_5 .

3) نضع $v_n = u_n - \alpha$.

أ - أحسب v_0 ثمّ v_1 و v_2 .

ب - برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها.

جـ - استنتج v_n بدلالة n ، ثمّ u_n بدلالة n.

83 نعتبر المتتالية (u_n) المعرّفة بـ $u_{n+1} = au_n + b$ ، مع $a \neq 0$ و $a \neq 1$ والحدّ الأول u_0 .

نسمي α فاصلة A نقطة تقاطع المستقيمين الذين معادلتيهما $y = x$ و $y = ax + b$.

1) بيّن أنه إذا كان $u_0 = \alpha$ فإنّ المتتالية (u_n) تكون ثابتة.

2) في ما يلي نفرض أنّ $u_0 \neq \alpha$.

برهن أن المتتالية (v_n) المعرّفة بـ $v_n = u_n - \alpha$ هي متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها.

3) عبّر عن v_n بدلالة n و v_0 ، ثمّ u_n بدلالة n و u_0 .

مسائل

84 (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث : $u_0 = 1$ ومن أجل $n \geq 1$ ، $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2}$.

1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 .

2) α عدد حقيقي غير معدوم . من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = u_n + \alpha$.

- عين قيمة العدد α التي تكون من أجلها المتتالية (v_n) هندسية .
- عبر عن v_n بدلالة n ؛ استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4) عين نهاية المتتالية (u_n) .

5) أحسب بدلالة n المجموع:

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. استنتج $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$

85 قرّر شخص أن يستهلك لتدابير المنزلية 80% من مداخله.

يزداد مدخله 3% سنويا وينقص من استهلاك لتدابير المنزلية 2,5% سنويا.

في البداية المدخل السنوي هو $y_0 = 400000$.

1) أ - أحسب القيمة C_0 التي يستهلكها في البداية .

ب - أحسب المداخل y_1 والاستهلاك C_1 للسنة الموالية $(n = 1)$.

جـ - أحسب y_2 و C_2 $(n = 2)$.

2) أ - برهن أن $C_n = 0{,}8 \times 0{,}975^n \times y_n$. مع y_n و C_n هما على الترتيب الاستهلاك والمداخل للسنة n .

ب - استنتج الاستهلاك C_n بدلالة n .

3) أ - أدرس تغيّرات المتتالية (C_n).

ب - عيّن نهاية C_n عندما يؤول n إلى $+\infty$.

4) أدرس تغيّرات المتتالية (C_n) في الحالة التي يرتفع فيها الدخل بـ 3% وينقص استهلاك بـ 3% سنويا.

86 في بداية ظهور وباء الإفوانزة (une épidémie de grippe) لاحظ عمال المصالح الطبية أن عدد المصابين الجدد في يوم متناسب مع عدد المرضى في اليوم السابق .

إذا كان عدد المرضى في اليوم الأول100 و في اليوم الثاني 120 ، فما هو :

1) عدد المرضى الجدد في اليوم الرابع ؟

2) عدد كل المرضى بعد 7 أيام ؟

3) عدد كل المرضى بعد 15 اليوم ؟

elbassair.net

2 الاستمرارية و النهايات 2

الكفاءات المستهدفة

- فهم معنى دالة مستمرة على مجال.
- فهم خاصية القيم المتوسطة و تطبيقها في البحث عن الحلول المقربة لمعادلات من الشكل $f(x)=\lambda$.
- تعيين نهاية دالة و تعيين المستقيمات المقاربة الموازية للمحورين.
- إثبات وجود مستقيم مقارب مائل و تحديد الوضع النسبي للمنحني بالنسبة إليه.

كوشي أوغسطين لويس: عالم رياضيات و فيزياء من جنسية فرنسية عاش في الفترة من 1789م إلى 1857م. كان لأعماله التي تميزت بالدقة تأثير عظيم على معظم فروع الرياضيات، و بصفة خاصة وضع أسس التحليل الحديث بدلالة النهايات و الاستمرار، و طور نظرية الدوال ذات متغيرات عقدية. شجعه على متابعة نشاطه في الرياضيات العالم لابلاس و العالم لاغرانج و أصبح أستاذا للرياضيات في مدرسة البوليتكنيك، جامعة السوربون و كلية فرنسا و بسبب آرائه السياسية و الدينية رفض أن يقسم يمين الولاء للويس فليب سنة 1830 ففي مع حفيد تشارلز العاشر ، و عينته جامعة تورينو في منصب كرسي أستاذية أنشئ من أجله، و لكنه تركه لتعليم حفيد تشارلز العاشر.

لقد نشر ما مجموعه 789 عملا ، تتضمن مقالات حول التكاملات المحدودة و انتشار الموجات ، كما نشر أوراقا بحثية في الهندسة و نظرية الأعداد و المرونة و نظرية الخطأ و الفلك و الضوء.



كوشي أوغسطين لويس

elbassair.net

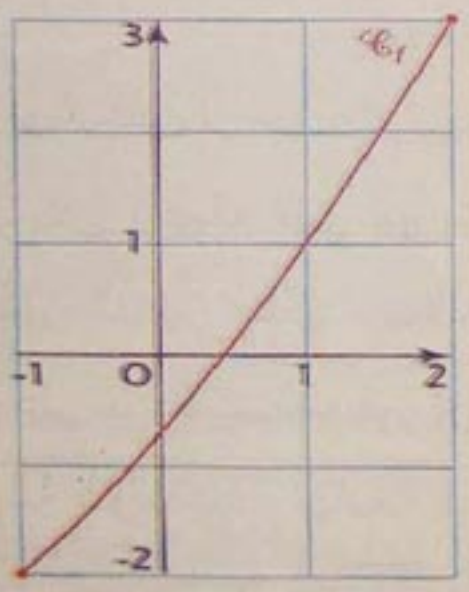
النشاط الأول

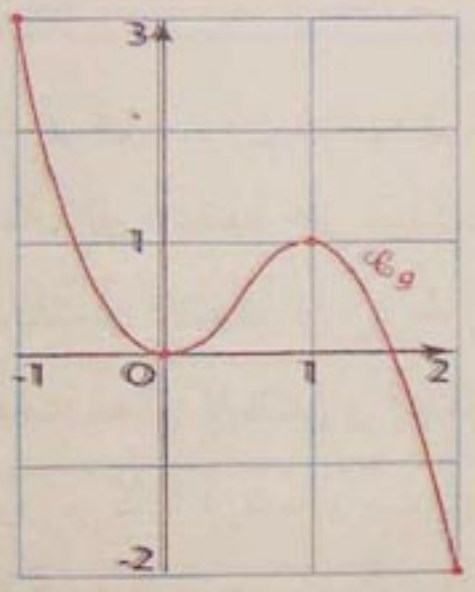
تعريف: نسمي الدالة الجزء الصحيح الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل عدد حقيقي x العدد الصحيح n حيث $n \leq x < n+1$ و نرمز لها بالرمز E أو [ ].

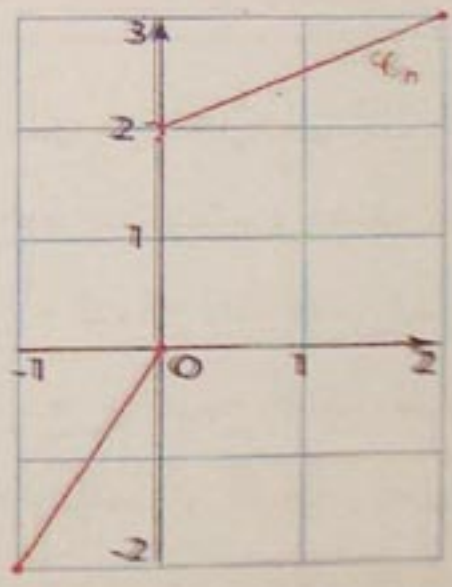
1. أحسب $E(-2,3)$ ، $E(-1)$ ، $E\left(\sqrt{2}\right)$ و $E(17,17)$.
2. f و g دالتان معرفتان على $[-1;2[$ كما يلي: $f(x)=E(x)$ و $\begin{cases} g(x)=xE(x) \; ; x \in [-1;1[\\ g(x)=x-1 \quad ; x \in [1;2[\end{cases}$
   أ) عين حسب قيم x عبارتي كل من $f(x)$ و $g(x)$.
   ب) أرسم في معلم $(O;I,J)$ المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين على الترتيب لـ f و g.
3. هل بإمكانك رسم المنحنيين (C_f) و (C_g) بدون رفع القلم (اليد) ؟ أكتب خلاصة.

النشاط الثاني

إليك المنحنيات (C_f)، (C_g) و (C_h) الممثلة على التوالي لثلاث دوال f، g و h معرفة على المجال $[-1;2]$ و ليكن k عددا حقيقيا من المجال $[-2;3]$.



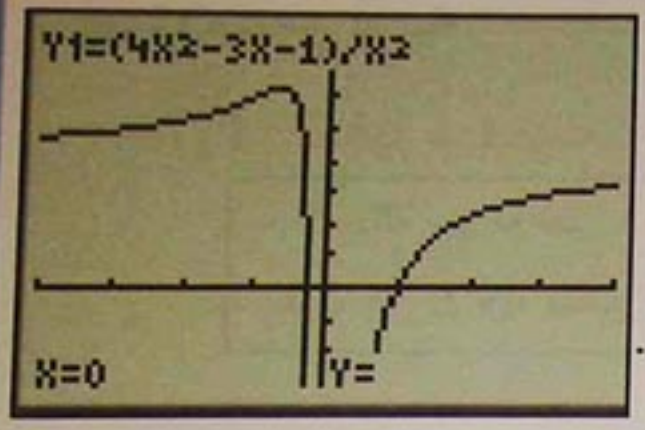




1. هل الدوال f، g و h مستمرة على المجال $[-1;2]$ ؟
2. بواسطة قراءة بيانية حدد، حسب قيم العدد الحقيقي k، عدد حلول كل معادلة من المعادلات التالية:
   $f(x)=k$ (1) $\quad g(x)=k$ (2) $\quad h(x)=k$ (3)
3. ماذا تمثل القيمتان -2 و 3 حدود المجال $[-2;3]$ ؟
4. من أجل كل عدد حقيقي k من المجال $[-2;3]$،
   - هل تقبل كل معادلة من المعادلات (1)، (2) ، (3) حلا على الأقل في المجال $[-1;2]$ ؟
   - هل تقبل كل معادلة من المعادلات (1)، (2) ، (3) حلا وحيدا في المجال $[-1;2]$ ؟

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net



النشاط الثالث

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

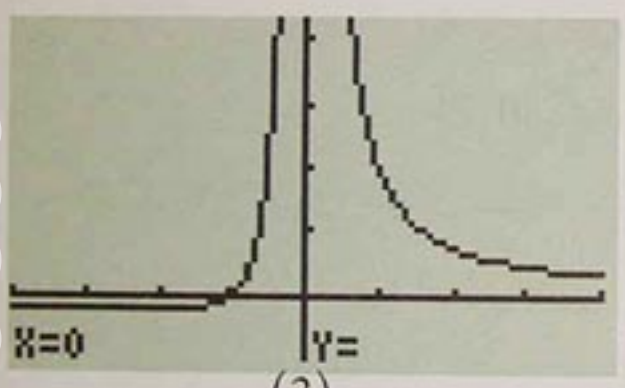
$$f(x)=\frac{4x^2-3x-1}{x^2}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني الظاهر على شاشة الحاسبة البيانية في الشكل المقابل.

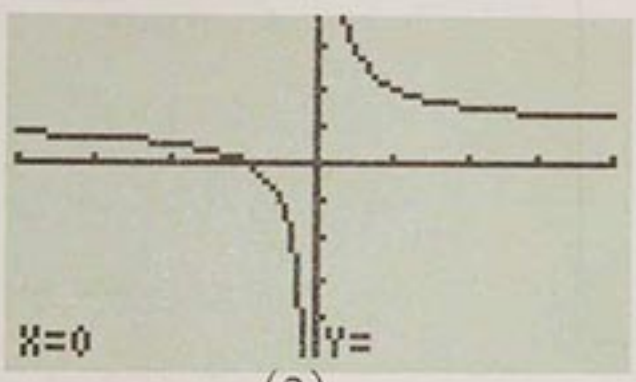
1. *ضع تخمينا خاصا بنهاية الدالة f عند كل من $-\infty$ و $+\infty$.
* برهن صحة التخمين باستعمال المبرهنات حول النهايات المدروسة في السنة الثانية.
* ماذا تستنتج فيما يخص المستقيم المقارب للمنحنى (C_f) ؟
2. *ضع تخمينا خاصا بنهاية الدالة f عند 0.
* برهن صحة التخمين باستعمال المبرهنات حول النهايات المدروسة في السنة الثانية.
* ماذا تستنتج فيما يخص المستقيم المقارب للمنحنى (C_f) ؟

النشاط الرابع

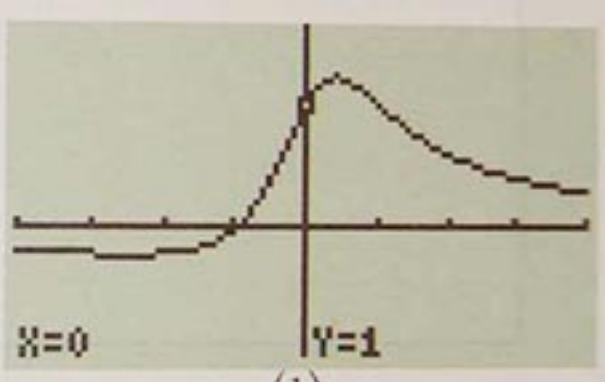
علما أن: ا) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$ جـ) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} h(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} h(x)=+\infty$ أرفق كل دالة من الدوال f، g و h بتمثيلها البياني من بين التمثيلات التالية:



(3)



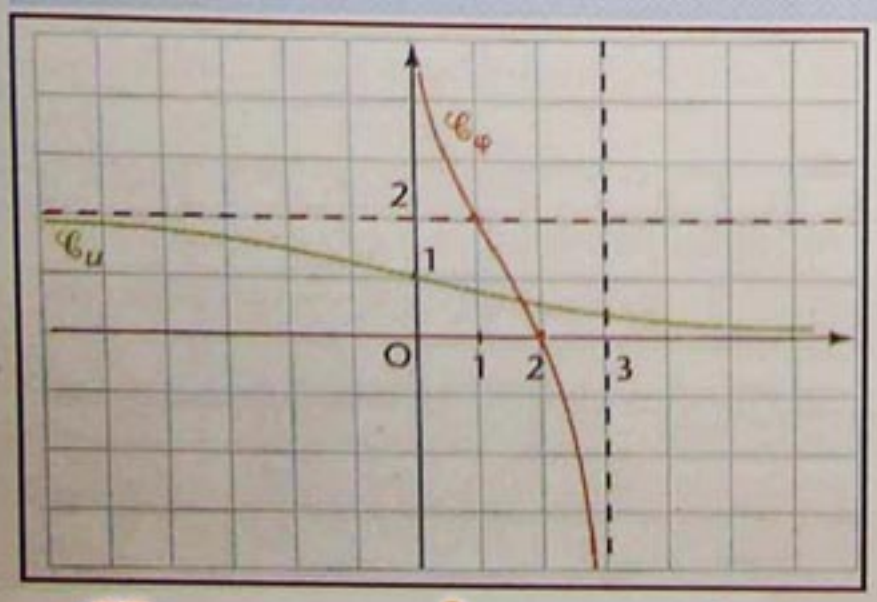
(2)



(1)

النشاط الخامس

تذكير: v دالة معرفة على مجال J و u دالة معرفة على مجال I بحيث من أجل كل x من I، $u(x)\in J$.
الدالة المركبة من الدالتين u و v بهذا الترتيب هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $v\circ u$ و المعرفة على I بـ
$(v\circ u)(x)=v\left[u(x)\right]$.



المنحنيان C_u و C_φ في الشكل المقابل هما لدالتين u و φ.

1. لتكن f مركب الدالتين u و φ بهذا الترتيب.
بواسطة قراءة بيانية عين:
* $f(0)$ * $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ * $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
2. لتكن g مركب الدالتين φ و u بهذا الترتيب.
بواسطة قراءة بيانية أدرس نهايتي الدالة g عند كل من 0 و 3.

elbassair.net

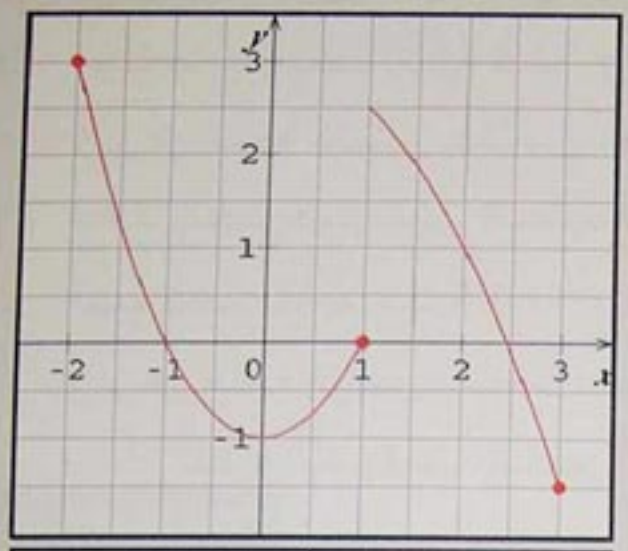
الدرس

ـ الاستمرارية

1. المفهوم الحدسي للاستمرارية

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$.

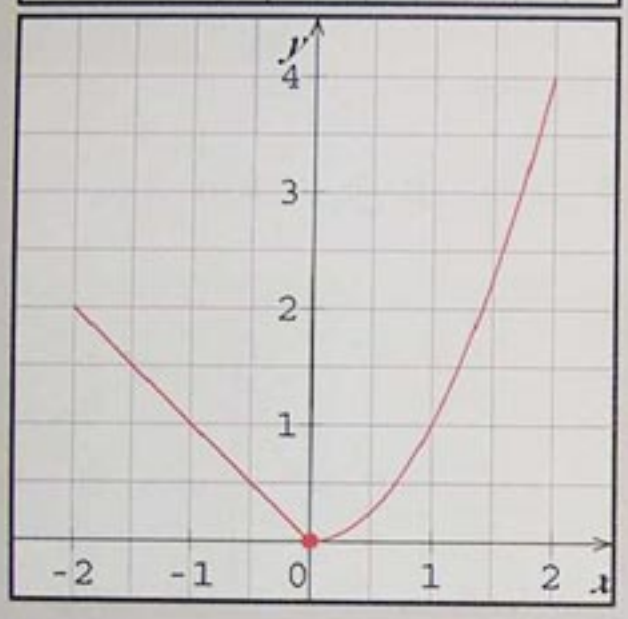
نقول عن f أنها مستمرة على I إذا استطعنا رسم منحنيها (C) بدون رفع القلم وفق خط مستمر.



مثال1

الدالة f الممثلة في الشكل المقابل غير مستمرة على المجال $[-2;3]$ لأنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.

بينما الدالة f مستمرة على كل من المجالين $[-2;1]$ و $]1;3]$.



مثال2

الدالة f المعرفة على المجال $]-2;2[$ بـ:

$$\begin{cases} f(x) = -x & ; x \in]-2;0] \\ f(x) = x^2 & ; x \in]0;2[\end{cases}$$

و الممثلة في الشكل المقابل مستمرة على المجال $]-2;2[$ لأنه باستطاعتنا رسم تمثيلها البياني بدون رفع القلم.

2. خواص(تقبل دون برهان)

نقبل بأن كل الدوال المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة مستمرة على كل من المجالات التي تكون معرفة عليها.

نتائج

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

أمثلة

- الدالة $x \mapsto 2x^2 - 3x + 4$ مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدالة $x \mapsto \dfrac{3x-2}{x^2-1}$ مستمرة على كل من المجالات $]-\infty;-1[$ ، $]-1;1[$ و $]1;+\infty[$.
- الدالة $x \mapsto 2x + 3 - \sqrt{x}$ مستمرة على المجال $[0;+\infty[$.
- الدالة $x \mapsto (x^2+1)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ مستمرة على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.

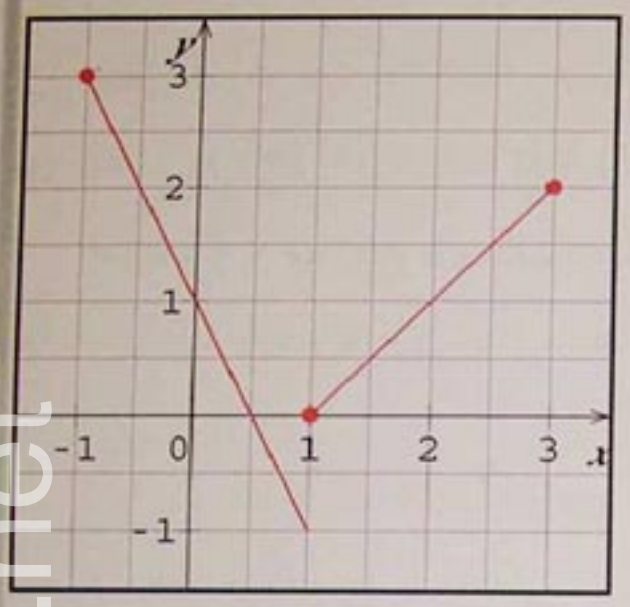
موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;3]$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = -2x + 1 & ; x \in [-1;1[\\ f(x) = x - 1 & ; x \in [1;3] \end{cases}$$

1. أحسب $f(-0,4)$، $f(1)$، $f(1,7)$.
2. أرسم في معلم التمثيل البياني للدالة f . هل الدالة f مستمرة على المجال $[-1;3]$؟



الحل

1. $f(-0,4) = 1,8$، $f(1) = 0$، $f(1,7) = 0,7$.
2. انظر الشكل المقابل.

نلاحظ أنه عند رسم المنحني الممثل للدالة f على المجال $[-1;3]$ نقوم حتميا برفع القلم عند النقطة ذات الفاصلة 1 و بالتالي فالدالة f ليست مستمرة على المجال $[-1;3]$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;2[$ بـ: $f(x) = xE(x) + 1$

حيث الدالة $x \mapsto E(x)$ هي الدالة الجزء الصحيح (أنظر النشاط الأول)

1. عين عبارة $f(x)$ على كل من المجالات التالية: $[-1;0[$ ، $[0;1[$ و $[1;2[$.
2. أرسم في معلم $(O;I,J)$ المنحني الممثل للدالة f.
3. هل الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1[$؟ على المجال $[-1;2[$؟

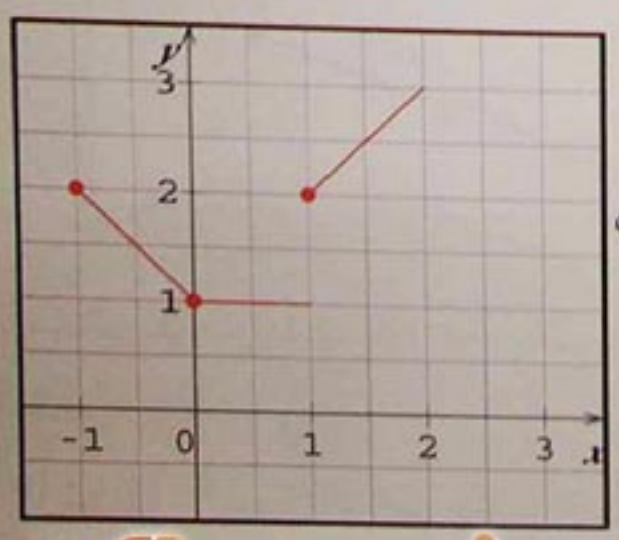
الحل

1. من أجل $x \in [-1;0[$ لدينا $E(x) = -1$ ومنه $f(x) = -x + 1$

   من أجل $x \in [0;1[$ لدينا $E(x) = 0$ ومنه $f(x) = 1$

   من أجل $x \in [1;2[$ لدينا $E(x) = 1$ ومنه $f(x) = x + 1$
2. انظر الشكل المقابل.
3. نعم الدالة f مستمرة على المجال $[-1;1[$ لأنه بإمكاننا رسم جزء المنحني في هذا المجال دون رفع القلم.

   الدالة f ليست مستمرة على المجال $[-1;2[$ لأنه لا يمكن رسم منحنيها البياني دون رفع القلم.



elbassa
elbassair.net

ـ الاستمرارية و المعادلات

1. مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان)

مبرهنة: f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث $f(c)=k$.

بصيغة أخرى: إذا كانت f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل على الأقل حلا c محصورا بين a و b.

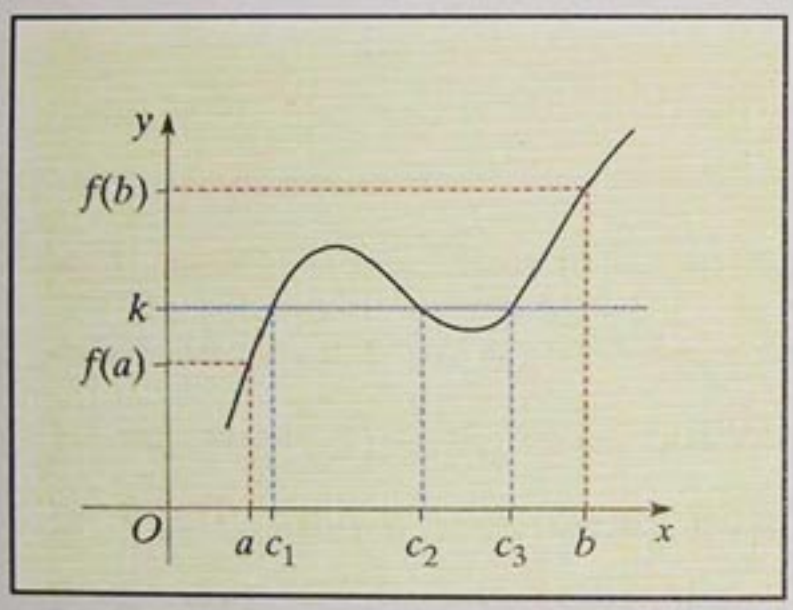
ملاحظة: مبرهنة القيم المتوسطة تؤكد فقط وجود حل على الأقل للمعادلة $f(x)=k$ أما تعيين الحلول أو قيم مقربة لها فيتم بإتباع خوارزميات مختلفة.

2. التفسير البياني

f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a;b]$ و ليكن (C) منحنيها البياني في معلم $(O;I,J)$.

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحنى (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b.

(بالنسبة للشكل المقابل (Δ) يقطع (C) في ثلاث نقط فواصلها على الترتيب c_1، c_2 و c_3).



نتيجة: إذا كانت الدالة f مستمرة و رتيبة تماما (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) على مجال $[a;b]$ فإن جدول تغيراتها يأخذ أحد الشكلين التاليين:

x	a		b
$f(x)$	$f(a)$	↘ k ↘	$f(b)$

x	a		b
$f(x)$	$f(a)$	↗ k ↗	$f(b)$

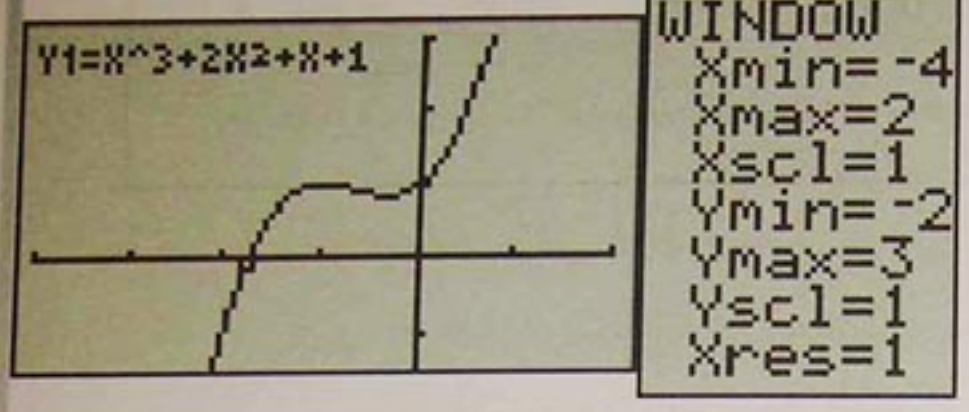
و بالتالي فإنه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلا وحيدا x_0 في المجال $[a;b]$.

تذكير: الأسهم المائلة في جدول تغيرات دالة تترجم استمرارية و رتابة الدالة على المجال المعتبر.

elbassair.net

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^3+2x^2+x+1$

1. أظهر على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني للدالة f .
2. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في مجال يطلب تحديده.



الحل

1. نحصل مثلا على الشكل المقابل.
2. يوحي الشكل بأن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا محصورا بين -2 و -1. بما أن f دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و بصفة خاصة على المجال $[-1;-2]$.

لدينا من جهة ثانية $f(-2)=-1$ و $f(-1)=1$ و بما أن 0 محصور بين -1 و 1 أي بين $f(-2)$ و $f(-1)$ فإن، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-1;-2]$.

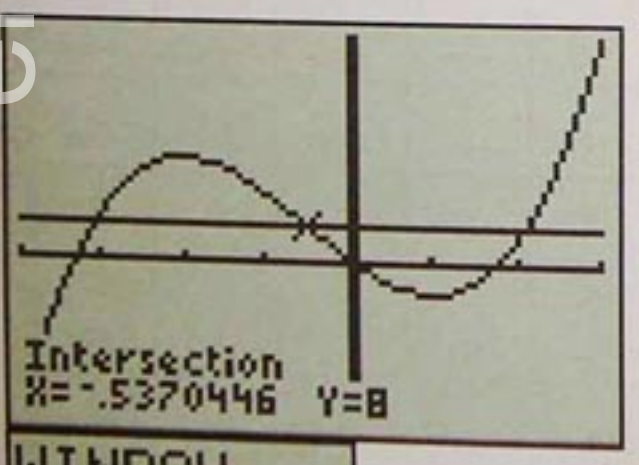
تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $[-4;3]$ بـ: $f(x)=2x^3+3x^2-12x+1$

1. أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .
2. أرسم التمثيل البياني للدالة f على شاشة حاسبة بيانية باختيار نافذة مناسبة.
3. بين أن المعادلة $f(x)=8$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2;1]$.
4. باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا لهذا الحل سعته 10^{-2}.

الحل

1. من أجل كل x من $[-4;3]$، $f'(x)=6(x+2)(x-1)$

x	-4		-2		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-31	↗	21	↘	-6	↗	46



2. أنظر الشكل المقابل.
3. لدينا $f(-2)=21$ ، $f(1)=-6$ و $-6\le 8\le 21$. f دالة كثير حدود فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ و بصفة خاصة على المجال $[-2;1]$. إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=8$ تقبل على الأقل حلا c في المجال $[-2;1]$. و بما أن f متناقصة تماما على $[-2;1]$ فإن c وحيد.
4. لتعيين حصر للحل c يمكننا، بعد تمثيل المستقيم ذي المعادلة $y=8$ ، إظهار قيم مقربة لإحداثيي نقطة التقاطع و هكذا نقرأ $c\approx -0,5370446$ و منه نستنتج الحصر التالي: $-0,54<c<-0,53$.

elbassair.net

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0;2\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-2x}$

1. حدد حسب قيم x إشارة x^2-2x.
2. أدرس نهاية الدالة f عند 2.
3. أدرس نهاية الدالة f عند $-\infty$.

الحل

1. نلاحظ أن $x^2-2x=x(x-2)$ و بتطبيق قاعدة إشارة ثلاثي الحدود من الدرجة الثانية نحصل على:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x^2-2x		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. لدينا: $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x+1)=7$ و $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-2x)=0$

بما أنه من أجل $0<x<2$، $x^2-2x<0$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} f(x)=-\infty$

و بما أنه من أجل $x>2$، $x^2-2x>0$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2} f(x)=+\infty$

3. لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2+x+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-2x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

من الواضح أننا بصدد حالة عدم التعيين إلا أن تطبيق القاعدة 2 يمكننا من إزالتها فنحصل على:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-2}$

أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$.

الحل

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x})=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$

من الواضح أننا بصدد حالة عدم التعيين و عليه فلابد من إزالتها و من أجل ذلك نتبع المنهجية التالية:

لدينا من أجل كل x من $]2;+\infty[$:

$$f(x)=\frac{x\left(1+\dfrac{\sqrt{x}}{x}\right)}{x\left(1-\dfrac{2}{x}\right)}=\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1-\dfrac{2}{x}}$$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)=1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$

ملاحظة: الدالة f ليست دالة ناطقة لأن البسط ليس كثير حدود بسبب وجود $\sqrt{x}$ فمن الخطأ إذن تطبيق القاعدة 2 لإزالة حالة عدم التعيين.

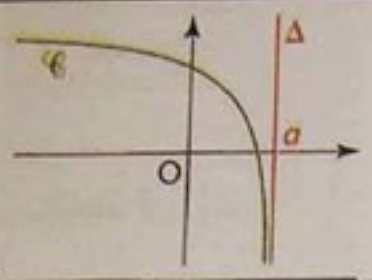
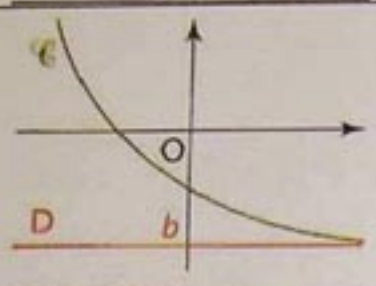
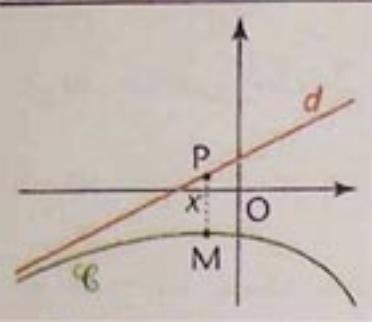
elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

ـ المستقيمات المقاربة

1. تذكير

a و b عددان حقيقيان. f دالة معرفة على مجال I و (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

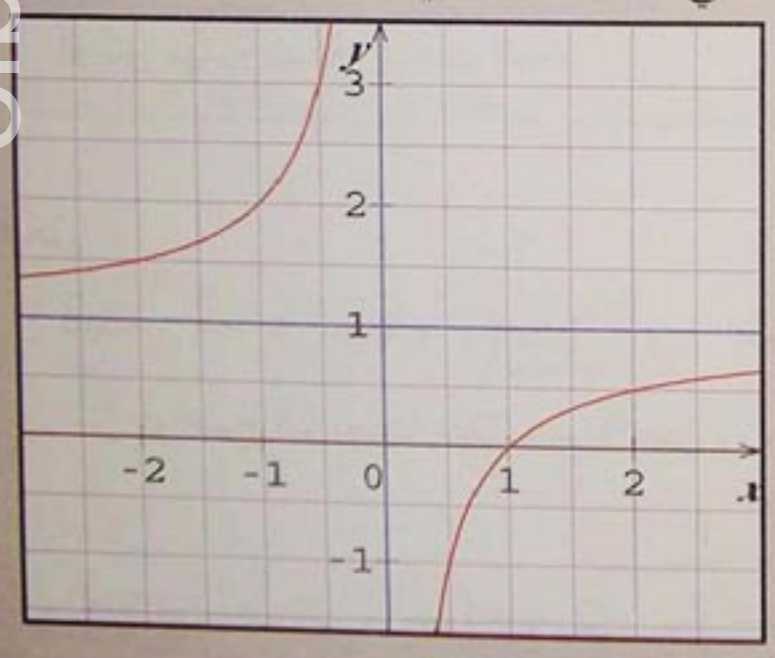
النهاية	المستقيم المقارب	التمثيل البياني
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$	المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x=a$ و الموازي لمحور التراتيب مستقيم مقارب للمنحنى (C)	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$	المستقيم (D) ذو المعادلة $y=b$ و الموازي لمحور الفواصل مستقيم مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	
$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$	المستقيم (d) ذو المعادلة $y=ax+b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	

ملاحظة: إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x)=ax+b+\varphi(x)$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=0$

فمن الواضح أن المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$ مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$x\mapsto 1-\frac{1}{x}$: f و ليكن (C) تمثيلها البياني.



لدينا $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$

و منه المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مستقيم مقارب للمنحني (C).

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. و منه المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

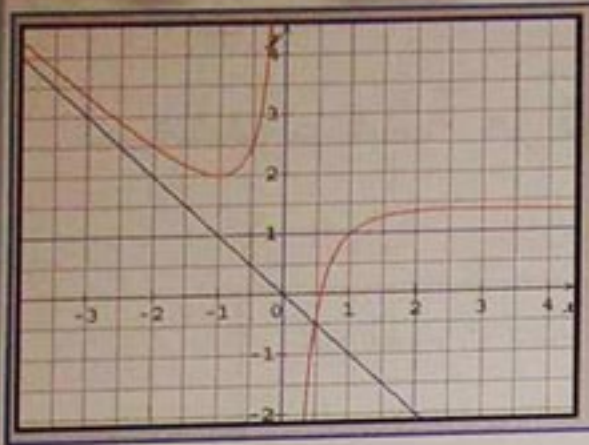
2. الوضع النسبي لمنحن و المستقيم المقارب

لدراسة وضعية المنحني (C) الممثل لدالة f بالنسبة إلى مستقيم مقارب له معادلته $y=ax+b$ نقوم بدراسة إشارة الفرق $[f(x)-(ax+b)]$.

إذا كان $f(x)-(ax+b)<0$ تكون وضعية (C) تحت المستقيم المقارب المائل.

إذا كان $f(x)-(ax+b)>0$ تكون وضعية (C) فوق المستقيم المقارب المائل.

elbassair.net



تمرين محلول1: المنحني (C) المرسوم في الشكل المقابل هو لدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$. رسمت المستقيمات المقاربة لهذا المنحني باللون الأزرق.

بواسطة قراءة بيانية:

1. **حدد معادلات المستقيمات المقاربة.**
2. **عين نهايات الدالة f عند كل من $-\infty$ ، 0 و $+\infty$**

الحل

1. للمنحني (C) ثلاث مستقيمات مقاربة أولها محور التراتيب $(x=0)$ ، الثاني عند $+\infty$ موازي لمحور الفواصل معادلته $y=1$ و الثالث عند $-\infty$ مائل معادلته $y=-x$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ * $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=-\infty$ * $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=+\infty$ * $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ *

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـ $f(x)=-x+2+\dfrac{3}{x^2}$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم $(O;I,J)$.

1. **بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+2$ مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ و عند $-\infty$.**
2. **أدرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل (Δ).**

الحل

1. لدينا: $f(x)-(-x+2)=\dfrac{3}{x^2}$ و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x^2}=0$ فإن (Δ) مستقيم مقارب لـ (C) عند $+\infty$ و عند $-\infty$.

2. لدينا: $f(x)-(-x+2)=\dfrac{3}{x^2}$ و بما أن $\dfrac{3}{x^2}>0$ فإن المنحني (C) يقع فوق المستقيم المقارب (Δ).

تمرين محلول3: تنتج إحدى الورشات أقلاما. الكلفة الإجمالية $C(q)$ بـ DA لصنع كمية q من الأقلام هي:

$$C(q)=5q+100 \quad \text{حيث} \quad q>0$$

1. **عين بدلالة q الكلفة المتوسطة $C_M(q)$ بـ DA لإنتاج قلم.**
2. **أدرس نهاية C_M عند $+\infty$. أعط تفسيرا بيانيا و آخر اقتصاديا لهذه النتيجة.**

الحل

1. الكلفة المتوسطة $C_M(q)$ لإنتاج وحدة هي نسبة الكلفة الإجمالية $C(q)$ على الكمية q و منه:

$$C_M(q)=\frac{C(q)}{q}=\frac{5q}{q}+\frac{100}{q}=5+\frac{100}{q}$$

2. لدينا: $\lim\limits_{q\to+\infty}\dfrac{100}{q}=0$ و منه $\lim\limits_{q\to+\infty} C_M(q)=5$

* <u>التفسير البياني</u>: المنحني الممثل للدالة C_M يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الفواصل معادلته $y=5$.
* <u>التفسير الاقتصادي</u>: عندما ترتفع الكمية المنتجة q بقدر كبير نلاحظ استقرار الكلفة المتوسطة عند $5\ DA$.

elbassair.net

لـ مفهوم دالة مركبة ــ النهاية بالمقارنة

1. الدالة مركب دالتين

تعريف: v دالة معرفة على مجال J و u دالة معرفة على مجال I بحيث من أجل كل x من I، $u(x)\in J$.

الدالة المركبة من الدالتين u و v بهذا الترتيب هي الدالة التي نرمز لها بالرمز $v\circ u$ و المعرفة على I بـ $(v\circ u)(x)=v\left[u(x)\right]$. و نقرأ v دائرة u لـ x.

مثال

نعتبر الدالتين u و v المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي: $u(x)=2x^2-3$ و $v(x)=-3x+1$

* الدالة $v\circ u$ معرفة على $\mathbb{R}$ و لدينا: $v\circ u(x)=v\left[u(x)\right]=v\left(2x^2-3\right)=-6x^2+10$
* الدالة $u\circ v$ معرفة على $\mathbb{R}$ و لدينا: $u\circ v(x)=u\left[v(x)\right]=u(-3x+1)=18x^2-12x-1$

2. نهاية دالة مركب دالتين

مبرهنة: a، b و c تمثل أعددا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$. u، v و f دوال حيث $f=v\circ u$.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to a}u(x)=b$ و إذا كانت $\lim\limits_{x\to b}v(x)=c$ فإن $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$

مثال

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\sqrt{\dfrac{2x+3}{x-1}}$ و نريد حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

نلاحظ أن f هي مركب الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ و $v(x)=\sqrt{x}$ $(f=v\circ u)$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to 2}v(x)=\sqrt{2}$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\sqrt{2}$

3. النهايات بالمقارنة

الخاصية1: f، g و h دوال و l عدد حقيقي.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=l$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $g(x)\le f(x)\le h(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$.

الخاصية2: f، g دالتان و l عدد حقيقي.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\ge g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

الخاصية3: f، g دالتان و l عدد حقيقي.

إذا كانت $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ و إذا كان من أجل x كبير بالقدر الكافي $f(x)\le g(x)$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

ملاحظة: تمدد هذه الخواص إلى حالتي النهاية عند $-\infty$ و عند عدد حقيقي

elbassair.net

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي: $f(x)=2\left(2-\frac{3}{x}\right)^2-3$

أدرس نهاية الدالة f عند $-\infty$، عند $+\infty$ و عند 0.

الحل

نلاحظ مثلا أن الدالة f هي الدالة المركبة من الدالتين u و v بهذا الترتيب حيث $u:x\mapsto 2-\frac{3}{x}$ و $v:x\mapsto 2x^2-3$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{3}{x}\right)=2$ وبما أن $\lim\limits_{x\to 2}\left(2x^2-3\right)=5$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=5$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=5$

أي: $\lim\limits_{x\to-\infty}u(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}u(x)=2$ و بما أن $\lim\limits_{x\to 2}v(x)=5$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=5$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=5$

* $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left(-\frac{3}{x}\right)=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}u(x)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)=+\infty$

* $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(-\frac{3}{x}\right)=-\infty$ و منه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}u(x)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}v(x)=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=+\infty$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;0[$ بحيث من أجل كل x من $]-\infty;0[$ لدينا:

$$\frac{x^2-1}{x^2}\le f(x)\le\frac{x-1}{x}$$

1. عين نهاية الدالة f عند $-\infty$.
2. باستعمال راسم منحنيات أو حاسبة بيانية مثل الدالتين $x\mapsto\frac{x-1}{x}$ و $x\mapsto\frac{x^2-1}{x^2}$ ثم حدد وضعية المنحني (C) الممثل للدالة f. أرسم تمثيلا بيانيا يمكن أن يكون هو المنحني (C).

الحل

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

و منه حسب الخاصية1 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$

2. يقع المنحني (C) الممثل للدالة f بين المنحنيين الممثلين للدالتين $x\mapsto\frac{x-1}{x}$ و $x\mapsto\frac{x^2-1}{x^2}$

المنحني الممثل باللون الأحمر يمكن أن يكون هو للمنحني (C).

تمرين محلول3: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)\le 2x-1$

1. عين نهاية الدالة f عند $-\infty$.
2. هل يمكن استنتاج نهاية الدالة f عند $+\infty$ ؟

الحل

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)=-\infty$ و بما أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)\le 2x-1$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)=+\infty$ و بما أن $f(x)\le 2x-1$ فهذا لا يسمح من استنتاج نهاية f عند $+\infty$.

elbassair.net

موقع البصائر التعليمي

تحديد حلول المعادلة $f(x)=k$

ينتج أحد المصانع كمية q من السكر مقدرة بالقناطر. الكلفة الإجمالية للإنتاج $C(q)$ بـ DA لصنع كمية q من السكر معطاة بالعلاقة:

$C(q)=5q^3-2q^2+160q+30000$ حيث $0\le q\le 20$

1. أحسب $C'(q)$ ثم ادرس إشارة $C'(q)$.
2. شكل جدول تغيرات الدالة C.
3. مثل على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني للدالة C باختيار نافذة مناسبة.
4. نريد معرفة كمية السكر التي يجب إنتاجها حتى تكون كلفة الإنتاج هي $50000\,DA$.
   - ضع تخمينا حول هذه الكمية انطلاقا من التمثيل البياني للدالة C.
   - برهن صحة التخمين باستعمال نتائج السؤال 2.
   - باستعمال حاسبة بيانية عين المدور إلى $0,01$ لكمية السكر المنتجة قدرت كلفة إنتاجها الإجمالية بـ $50000\,DA$.

على نهج عمر الخيام

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على التوالي على $\mathbb{R}^*$ و $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{1}{x}$ و $g(x)=x^2-x+2$.

1. مثل على نفس شاشة حاسبة بيانية C_f و C_g التمثيلين البيانيين للدالتين f و g على الترتيب.
2. ضع تخمينا حول عدد نقط تقاطع المنحنيين C_f و C_g.
3. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0، المعادلة $f(x)=g(x)$ تكافئ المعادلة $x^3-x^2+2x-1=0$.
4. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=x^3-x^2+2x-1$
   - أدرس اتجاه تغير الدالة h على $\mathbb{R}$.
   - أحسب $h(0)$ و $h(1)$.
   - برهن أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا c على $\mathbb{R}$.
   - باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا للحل c سعته 10^{-2}.

عمر الخيام (1040-1131م)

حكيم وفلكي وعالم رياضيات وشاعر هو غياث الدين أبو الفتح عمر بن إبراهيم الخيام ولد في نيسابور عاصمة خراسان، بدأ تعليمه الأولي في إحدى مدارس نيسابور لتعلم القراءة والكتابة، ولما قوي واشتد ساعده رحل إلى سمرقند لدراسة الرياضيات،فأنجز نظاماً للأرقام أكثر اتساعاً من نظام الإغريق، فألف كتاباً بالعربية (الجبر والمقابلة) ترجم إلى الفرنسية عام (1851). كما أوجد طريقة لاستخراج جذور الأرقام وعالج لأول مرة مسائل التكعيب في الجبر ولما برزت موهبته في علم الفلك إلى جانب شهرته في الرياضيات، استدعاه السلطان السلجوقي لتعديل التقويم، وكلفه ببناء برج فلكي في أصفهان ، وإن إجادته للغة العربية والكتابة بها كانت حافزا له لقراءة شعر المعري فكان له الأثر في شعر الرباعيات لغة وأسلوبا ومضموناً فلقب بالحكيم في الثقافتين الفارسية والعربية ولقبه الأوربيون بملك الحكمة.

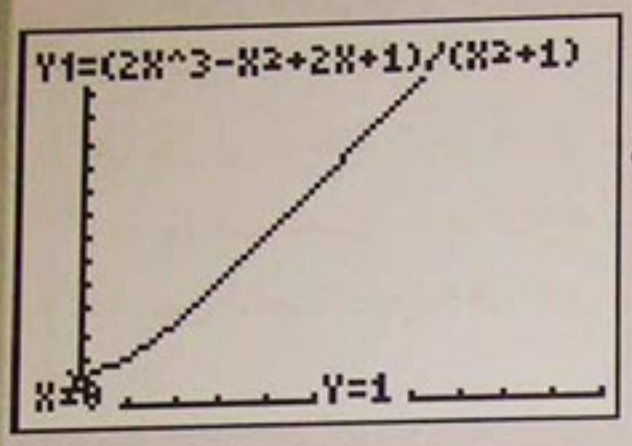
في كتاب الجبر والمقابلة قدم طريقة هندسية لحل بعض المعادلات باستعمال نقط تقاطع منحنيات مألوفة.

elbassair.net

وجود مستقيم مقارب مائل

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{2x^3-x^2+2x+1}{x^2+1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم.



تمثيل المنحني (C_f) على شاشة حاسبة بيانية أو على مجدول يوحي بوجود مستقيم مقارب مائل (Δ) عند $+\infty$.

في رأيك لماذا ؟ أعط معادلة للمستقيم (Δ).

- **التخمين بواسطة مجدول**

	A	B	C	D
1	x	f(x)	f(x)/x	f(x)-2x
2	100			
3	500			
4	1000			
5	1500			
6	2000			
7	2500			
8	3000			
9	3500			
10	4000			
11	4500			
12	5000			
13	5500			
14	6000			
15	6500			
16	7000			
17	7500			
18	8000			
19	8500			
20	9000			
21	9500			
22	10000			
23	10500			
24	11000			
25	11500			
26	12000			

* أنجز باستعمال مجدول ورقة الحساب الموالية:
* أحجز في الخلية $B2$ عبارة $f(x)$
* أحجز في الخلية $C2$ عبارة $f(x)/x$ $(=B2/A2)$
* أحجز في الخلية $D2$ عبارة $[f(x)-2x]$ $(=B2-2*A2)$
* حدد الخلايا من $B2$ إلى غاية $D2$ ثم اسحب نحول الأسفل إلى غاية الخط 26.
* ضع تخمينا حول $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-2x]$.
* ضع حينئذ تخمينا حول معادلة المستقيم المقارب للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

- **إثبات صحة التخمين**

* أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$.
* تحقق أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f(x)=2x-1+\dfrac{2}{x^2+1}$.
* أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2+1}$ ثم استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(2x-1)]$
* ضع خلاصة.
* أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x-1$.
* مثل (C_f) و (Δ) معا على شاشة حاسبة بيانية مع اختيار نافذة مناسبة.

تطبيق: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x-1}$

أنجز نفس العمل السابق بوضع تخمين ثم البرهان على صحته.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

موضوع محلول

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=x^5+3x^3+7x^2+2x+7$$

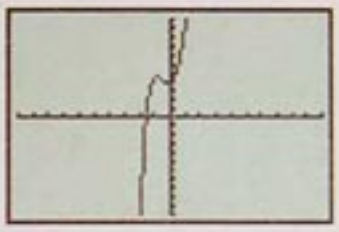
1. مثل على شاشة حاسبة بيانية الدالة f من أجل $-10\le x\le 10$.
2. أدرس نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و $+\infty$.
3. خمن عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.
4. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا α محصورا بين -2 و -1.
5. عين، باستعمال حاسبة بيانية، حصرا للعدد α سعته $0,001$.
6. عين الأعداد الحقيقية a، b و c بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\left(x^2+1\right)\left(ax^3+bx+c\right)$$

7. بين أن α هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x)=0$ على $\mathbb{R}$.

حل مختصر

1)



ضبط النافذة: $\begin{cases}-10\le x\le 10\\-20\le y\le 20\end{cases}$

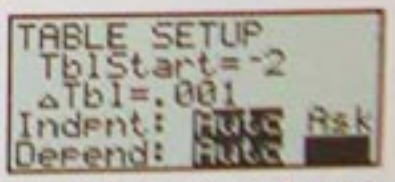
2) لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^5=-\infty$

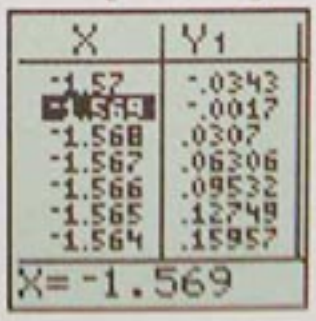
و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^5=+\infty$

3) يمكن أن نخمن انطلاقا من التمثيل البياني على شاشة الحاسبة أن للمعادلة $f(x)=0$ حلا وحيدا.

4) الدالة f دالة كثير حدود فهي إذن مستمرة على $\mathbb{R}$ و منه على $[-2;-1]$. لدينا $f(-2)=-25$ و $f(-1)=8$. و بما أن $f(-2)\times f(-1)<0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[-2;-1]$.

5)





لدينا: $-1,569<\alpha<-1,568$

6) بعد النشر و المطابقة نجد: $a=1$، $b=2$ و $c=7$.

7) بوضع $g(x)=x^3+2x+7$ و بما أن $x^2+1\neq 0$ فإن $f(x)=0$ يعني $g(x)=0$. الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.

تعاليق

- نذكر أن نهاية دالة كثير حدود عند $-\infty$ و عند $+\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة.

- حلول المعادلة $f(x)=0$ هي فواصل نقط تقاطع المنحنى الممثل للدالة f مع محور الفواصل و بالتالي عدد الحلول هو نفسه عدد نقط التقاطع.

- قبل تطبيق مبرهنة القيم المتوسطة يجب التحقق من توفر شروطها.

- للحصول على حصر سعته $0,001$ نأخذ الخطوة $0,001$ عند ضبط النافذة.

- يمكن كذلك تعيين قيمة مقربة لفاصلة نقطة التقاطع ثم استنتاج الحصر المطلوب.

- نستبدل معادلة بمعادلة مكافئة لها.

elbassair.net

موضوع مع إرشادات

من بين الأجوبة المقترحة بالنسبة لكل سؤال جواب واحد فقط صحيح يطلب وضع العلامة × في الخانة المقابلة له. تبرير الاختيار غير مطلوب.

- تمنح 0,5 نقطة لكل جواب صحيح.
- تنقص 0,25 نقطة بالنسبة لكل جواب خاطئ.
- لا تضاف و لا تنقص أي نقطة في حالة عدم الإجابة.
- إذا كان مجموع العلامات سالبا تمنح العلامة 0 للمترشح في التمرين.

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]2;+\infty[$ بـ: $f(x)=-2x+3-\dfrac{5}{x-2}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1. عبارة أخرى لـ $f(x)$ هي: $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+11}{2-x}$.	صحيح ☐ خاطئ ☐
2. يقبل المنحنى (C) مستقيما مقاربا موازيا لمحور التراتيب معادلته: $x=2$.	صحيح ☐ خاطئ ☐
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.	صحيح ☐ خاطئ ☐
4. المستقيم ذو المعادلة $y=-2x+3$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C) عند $+\infty$.	صحيح ☐ خاطئ ☐
5. تقبل المعادلة $f(x)=6$ حلين من إشارتين مختلفتين.	صحيح ☐ خاطئ ☐

إرشادات

1. قم بتوحيد المقامات في العبارة الأولى لـ $f(x)$.
2. لابد من دراسة نهاية الدالة f عند 2. في حالة قراءة النهاية على شاشة حاسبة بيانية يجب التفكير في اختيار نافذة مناسبة.
3. أدرس نهاية الدالة f عند $-\infty$.
4. عين في البداية عبارة $f(x)-(-2x+3)$ ثم أدرس نهايتها عند $+\infty$.
5. يمكنك استعمال حاسبة بيانية و لكن لا تنسى أن الدالة f معرفة فقط على المجال $]2;+\infty[$.

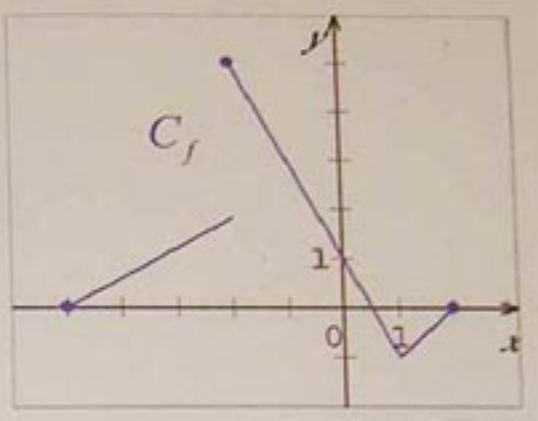
موقع عيون البصائر التعليمي

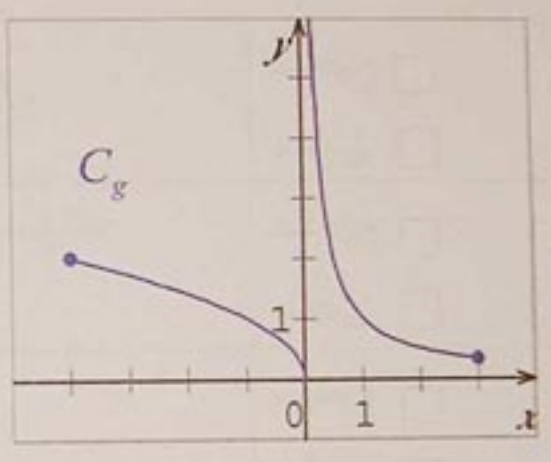
elbassair.net

تمارين تطبيقية

1 - الاستمرارية

1 f و g دالتان معرفتان على $[-5;2]$ و $[-4;3]$ على الترتيب ، الشكل التالي هو التمثيل البياني لهما في معلم .





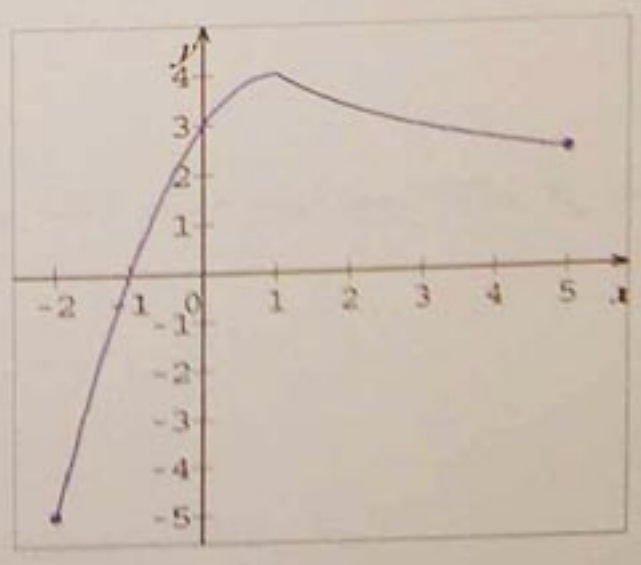
1) هل الدالة f مستمرة على $[-5;2]$ ؟

2) هل الدالة g مستمرة على $[-4;3]$ ؟

3) اذكر مجالات تكون عليها الدالة f مستمرة.

4) اذكر مجالات تكون عليها الدالة g مستمرة.

2 الشكل التالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على $[-2;5]$ في معلم متعامد و متجانس.



هل الدالة f مستمرة على المجالات التالية:

$[-2;0]$ ، $[-2;1]$ ، $[1;5]$ ، $[-2;5]$ ؟

3 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=2x+5 \ ; \ x\in\ ]-\infty;2] \\ f(x)=-x+7 \ ; \ x\in\ ]2;+\infty[\end{cases}$$

1) ارسم المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس من المستوي.

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ لماذا ؟

4 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=-x+2 \ ; \ x\in\ ]-\infty;1] \\ f(x)=\sqrt{x} \ \ ; x\in\ ]1;+\infty[\end{cases}$$

1) ارسم المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس من المستوي.

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟ لماذا ؟

5 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;2[$ كما يلي:

$$f(x)=x+1+E(x)$$

1) أكتب، حسب قيم x، $f(x)$ بدون العبارة $E(x)$.

2) أرسم المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس من المستوي.

3) هل f مستمرة على $[0;2[$ ؟

4) عين المجالات التي تكون فيها f مستمرة.

6 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$(m\in\mathbb{R}) \quad \begin{cases} f(x)=3x+m \ ; \ x\in\ ]-\infty;1[\\ f(x)=x^2+1 \ \ ; \ \ x\in[1;+\infty[\end{cases}$$

1) هل الدالة f مستمرة على $[1;+\infty[$ ؟ على $]-\infty;1[$ ؟

2) كيف تختار العدد m بحيث تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

3) ارسم المنحنى الممثل للدالة f .

مساعدة: نختار العدد m بحيث يكون جزئي المنحنى في المجالين $[1;+\infty[$ و $]-\infty;1[$ متصلين.

7 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$\begin{cases} f(x)=x^2+x-3 \ \ ; \ \ x\in[1;+\infty[\\ f(x)=..... \ \ \ \ \ \ \ ; \ \ x\in\ ]-\infty;1[\end{cases}$$

elbassair.net

• اقترح عبارة لـ $f(x)$ على المجال $]-\infty;1[$ حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$.

2 ـ الاستمرارية و المعادلات

8 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

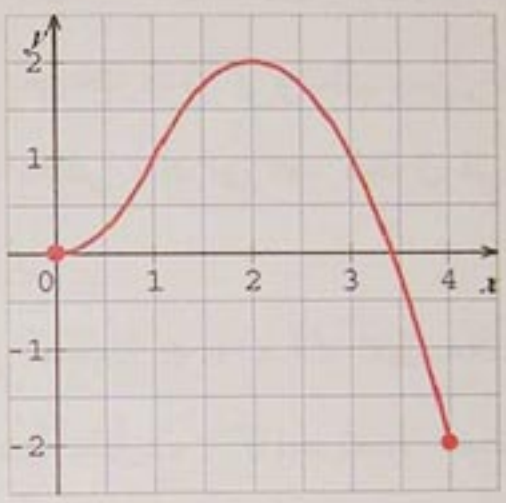
$$f(x)=\begin{cases}-x+1 ; & x\in]-\infty;0[\\ -\frac{x^2}{3}+2x+1 ; & x\in [0;6]\\ -2x+13 ; & x\in]6;+\infty[\end{cases}$$

1) مثل في معلم متعامد و متجانس منحنى الدالة f .

2) هل الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

3) عين بيانيا حلول المعادلة $f(x)=0$.

9 الشكل التالي يمثل المنحنى البياني لدالة f معرفة على $[0;4]$



أ) شكل جدول تغيرات الدالة f .

ب) هل الدالة f مستمرة على المجال $[0;4]$ ؟

2) أ) على المجال $[2;4]$ ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=\frac{3}{2}$ ؟

ب) بقراءة بيانية أعط قيمة مقربة لهذه الحلول(أو الحل).

10 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$f(x)=2x^3+2x+3=0$$

1) احسب $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α، حيث $-1<\alpha<0$.

2) باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا للعدد α سعته 5×10^{-2}

11 نعتبر الدالة f المعرفة على $[1;3]$ بـــ:

$$f(x)=x^3-5x^2+3x+4$$

1) احسب $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) أ) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;2]$.

ب) باستعمال حاسبة عين حصرا للعدد α سعته 10^{-3}.

12 f هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ:

$$f(x)=x+\sqrt{x}$$

1) برر لماذا الدالة f مستمرة على $]0;+\infty[$ ؟

2) أدرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3) احسب $f(3)$ و $f(4)$. استنتج أن المعادلة $f(x)=5$ تقبل حلا وحيدا α .

4) باستعمال حاسبة ، أعط حصراً لـ α سعته $\frac{1}{10}$.

13 لتكن f الدالة كثير الحدود المعرفة كما يلي :

$$f(x)=3x^4-4x^3-6x^2+12x-5$$

1) احسب $f'(x)$ مشتقة الدالة f ثم تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=12(x-1)^2(x+1)$.

3) استنتج تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

4) استنتج عدد حلول المعادلة $f(x)=0$.

5) باستعمال الآلة الحاسبة اعط قيمة مقربة لحل المعادلة $f(x)=0$ الذي ينتمي إلى $]-2;-1[$.

14 يعطى جدول تغيرات دالة f كما يلي:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	-2	↗	5

أعط في كل حالة من الحالات التالية عدد حلول المعادلة المقترحة في $\mathbb{R}$:

1) $f(x)=7$

2) $f(x)=-5$

3) $f(x)=-0,5$

15 يعطى جدول تغيرات الدالة f كما يلي:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	0

ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=1$ ؟ .برّر الجواب.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

تمارين

16 يعطى جدول تغيرات الدالة f كما يلي:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-1	↗	$+\infty$

1) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=0$ ؟ برر.

2) ما هو عدد حلول المعادلة $f(x)=-5$ ؟ برر.

17 من أجل كل من الدوال f ، g و h المعرفة بجدول تغيراتها ، اذكر عدد حلول المعادلة المعطاة محدّدا لكل منها المجال الذي ينتمي إليه الحل:

أ) $f(x)=-2$

x	$-\infty$		-4		-3		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$ | $+\infty$	↘	$-\infty$

ب) $g(x)=0$

x	$-\infty$		-4		2		5		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	-3	↗	4	↘	$-\infty$

ج) $h(x)=3$

x	$-\infty$		-4		3		5		$+\infty$
$h(x)$	3	↘	-9	↗	$+\infty$ | $-\infty$	↗	-5	↘	$-\infty$

18 يعطى جدول تغيرات الدالة f كالتالي :

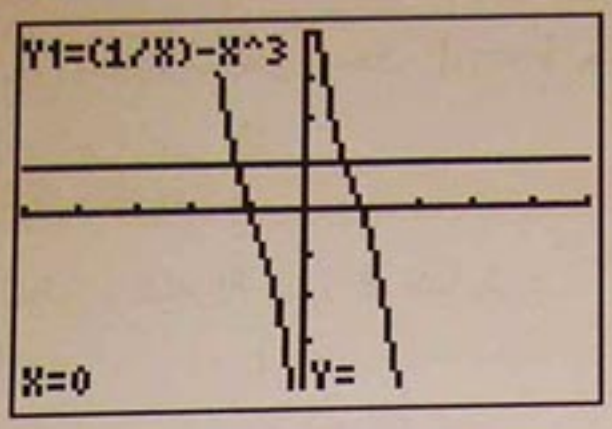
x	-3		1		5
$f(x)$	2	↘	-6	↗	4

عين عدد حلول المعادلة $f(x)=m$ في المجال $[-3;5]$ حيث m عدد حقيقي معطى.

19 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{x}-x^3$$

1) الشكل التالي هو التمثيل البياني للدالة f على شاشة الحاسبة و المستقيم الذي معادلته $y=1$



أ) خمن عدد حلول المعادلة $f(x)=1$.

ب) اعط المدور إلى 10^{-2} للحل (أو الحلول) باستعمال الحاسبة.

2) أ) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب) برهن التخمين الذي أجريته في السؤال 2) .

20 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x$$

1) ادرس تغيرات الدالة f و مثل جدول تغيراتها.

2) k عدد حقيقي ، ادرس عدد الحلول في $\mathbb{R}$ للمعادلة $f(x)=k$.

3) بين أن المعادلة $f(x)=8$ تقبل حلا واحدا α .اعط حصرا لـــ α بتقريب 10^{-2} مستعملا الحاسبة البيانية.

21 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$f(x)=-2x^3+3x^2-x+5$$

1) احسب $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات f .

2) استنتج أن المعادلة $-2x^3+3x^2-x=-5$ تقبل حلا واحدا α .اعط حصرا لـــ α بتقريب 10^{-2}

22 1) بين أن المعادلة $x^3+2x-1=0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $[0;1]$.

2) باستعمال حاسبة أوجد حصرا لهذا الحل سعته 0,04

23 بين أن كل دالة كثير حدود درجته فردية تقبل على الأقل جذرا حقيقيا.

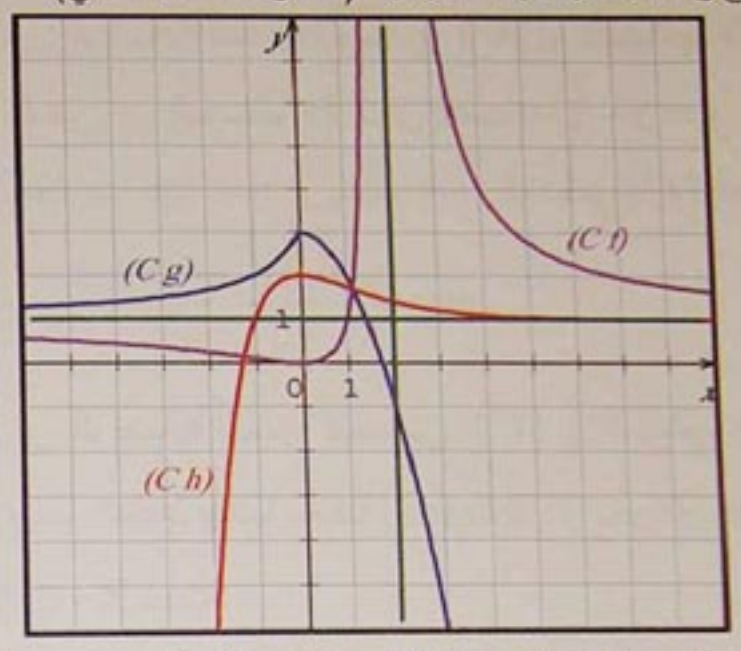
24 لتكن f دالة مستمرة على $[0;1]$ و تأخذ قيمها في $[0;1]$. بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل على الأقل حلا واحدا.

elbassair.net

3 - تتمات على النهايات

تعيين النهايات بيانيا

في التمارين من 25 إلى 28 نعرف ثلاث دوال f ، g و h بتمثيلاتها البيانية (انظر الشكل التالي)



25 شكل جدول تغيرات كل من الدوال f ، g و h.

موضحا النهايات عند حدود مجموعة التعريف

26 1) عين النهايات عند $+\infty$ (إذا كان ذلك ممكنا) لكل من الدوال التالية :

أ) $f+g$ ، $f+h$ ، $g+h$

ب) $f\times g$ ، $f\times h$ ، $g\times h$

2) عين النهايات عند $-\infty$ لنفس الدوال السابقة.

27 عين النهايات عند $+\infty$ و عند $-\infty$ (إذا كان ذلك ممكنا) لكل من الدوال التالية :

أ) $\frac{f}{g}$ ، $\frac{h}{g}$ ، $\frac{f}{h}$

ب) $f+\frac{1}{g}$ ، $2h-\frac{1}{f}$

28 احسب النهايات التالية في حالة وجودها:

أ) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}2}\left[f(x)+g(x)\right]$

ب) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2}\left[f(x)\times g(x)\right]$

ج) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{g(x)}{f(x)}$

د) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{f(x)}$

العمليات على النهايات

29 عين النهايات التالية :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3x+2-\frac{1}{x}\right)$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)$
- $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}\left(-2x+1+\frac{3}{x}\right)$
- $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-1}\left(1-x-\frac{1}{x+1}\right)$

30 عين النهايات للدالة f عند حدود مجموعة التعريف D_f.

- $f(x)=x+\frac{2}{x+1}$ ، $D_f=]-\infty;-1[$
- $f(x)=1-2x+\frac{3}{2-x}$ ، $D_f=]2;+\infty[$
- $f(x)=2-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-1}$ ، $D_f=]-\infty;1[$

31 عين النهايات للدالة f عند حدود مجوعة التعريف D_f

- $f(x)=(x-2)\sqrt{x+1}$ ، $D_f=[-1;+\infty[$
- $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x}}+\frac{2}{x-1}$ ، $D_f=]0;1[$
- $f(x)=2+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ ، $D_f=]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$

نهايات الدوال كثيرات الحدود و الدوال الناطقة

32 عين النهايات للدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=x^3+5x-1$
2) $f(x)=-3x^3+2x^2$
3) $f(x)=\left(-x^3+x-1\right)(1-x)$
4) $f(x)=\left(x^2-1\right)^3\left(2-x^3\right)^2$
5) $f(x)=-2x^4+x^2-6$
6) $f(x)=\left(-2x^2+3\right)\left(1-x^2\right)$

33 عين النهايات للدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$ محددا مجموعة التعريف في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=\frac{-5x}{2x+1}$ ، 2) $f(x)=\frac{2x^2-4x+3}{-x+1}$ ،

elbassair.net

موقع البصائر التعليمي

تمارين

3) $f(x)=\dfrac{2x}{(2-x)^2}$ ، 4) $f(x)=\dfrac{2x^2+x+1}{x^2+x-2}$

5) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+1}$ ، 6) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2-x-1}$ ،

7) $f(x)=\dfrac{1-x+x^2}{1-4x^2}$ ، 8) $f(x)=\dfrac{5-2x}{x^2+3}$

34 احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x+3}{2x-2}$ ، $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{-2x+1}{3-x}$ ، $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-3}{x+2}$ ،

$\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{x^2+1}{(2x-1)^2}$ ، $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5-2x^2}{x^2-4}$ ، $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+5x-6}{x^2-1}$

$\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-3x-4}{x^2-x-2}$ ، $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-4}{x^2-x-2}$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2}{x^2-4x+3}$ ، $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+6}{x^2+x-2}$

4 ـ المستقيمات المقاربة

35 لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$ بـ : $f(x)=1+\dfrac{x}{4-x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني.

- عين المستقيم المقارب الأفقي و المستقيم المقارب العمودي للمنحنى (C_f).
- حدّد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى مستقيمه المقارب الأفقي.

36 لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{-x^2+4x-1}{x-1}$ و (C_f) تمثيلها البياني

1) عين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) أ)عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث من أجل كل $x\in]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x-1}$

ب) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل المستقيم D الذي معادلته $y=-x+3$ كمستقيم مقارب عند $+\infty$

3) عين نهاية f عند 1 ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

37 1) بين أن المنحنى (C) الذي معادلته $y=\dfrac{2x^2+5x+11}{2x+3}$ حيث $x\neq -\dfrac{3}{2}$ يقبل المستقيم D الذي معادلته $y=x+1$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$.

2) ادرس الوضعية النسبة للمنحنى (C) و المستقيم D .

38 1) بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=x-1$ مستقيم مقارب عند $+\infty$ و عند $-\infty$ للمنحنى (C) الذي معادلته $y=\dfrac{x^3+3x^2+3x+3}{(x+2)^2}$.

2) ادرس الوضعية النسبة للمنحنى (C) و المستقيم D

39 ارسم تمثيلا بيانيا ممكنا (C) لدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ حيث:

- (C) يقبل مستقيما مقاربا معادلته $x=1$.
- (C) يقبل مستقيما مقاربا عند $+\infty$ معادلته $y=1$
- (C) يقبل مستقيما مقاربا عند $-\infty$ معادلته $y=-2$
- f متزايدة على $]-\infty;1[$ و على $]1;+\infty[$
- المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين هما -1 و 3 .

40 لتكن الدالة العددية f لـ x المعرفة على $]3;+\infty[$ كما يلي $f(x)=\dfrac{x^2-x-6}{(x-3)^2}$

1) احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}3} f(x)$.ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى الممثل للدالة f ؟

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.استنتج أن منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا آخر D يطلب تعيين معادلة له ، ثم ادرس وضعية المنحنى بالنسبة إلى D .

41 1) ادرس إشارة $1-x^2$

2) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي :

$f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-x+1}{1-x^2}$

أ) احسب نهاية الدالة f عند 1 و عند $+\infty$

ب) تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x من $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$:

$f(x)=2-x-\dfrac{1}{1-x^2}$

elbassair.net

ج) بين أن المنحنى الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تعيين معادلة لكل منهما.

42 لتكن الدالة العددية f المعرفة على $]-\infty;-1[$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{-2x^2-x}{x+1}$

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث من أجل كل x من $]-\infty;-1[$: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

2) احسب $\lim\limits_{\substack{x\longrightarrow -1\\ <}} f(x)$.ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى الممثل للدالة f ؟

3) بين أن المنحنى الممثل للدالة f يقبل المستقيم D الذي معادلته $y=1-2x$ كمستقيم مقارب، ثم ادرس وضعية المنحنى بالنسبة إلى D .

43 بكالوريا

لتكن الدالة f المعرفة بجدول تغيراتها التالي، f' هي مشتقة الدالة f

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ ‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	-6	↘ … ‖ $+\infty$ ↘	2	↗ …

نقبل أن الدالة f معرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;+\infty[$

بـــ: $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+1}$

حيث a ، b و c أعداد حقيقية

1) احسب $f'(x)$ بدلالة a ، b و c .

2) بالاستعانة بجدول التغيرات بين أن:

$a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=4$

3) أتمم جدول التغيرات بتعيين النهايات المنقوصة.

4) بين أن المنحنى C_f الممثل للدالة f يقبل المستقيم D الذي معادلته $y=x-1$ كمستقيم مقارب عند $-\infty$ وعند $+\infty$

- ادرس وضعية المنحنى C_f بالنسبة للمستقيم D .

44 لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$

نسمي (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس .

1) احسب نهايات الدالة عند $+\infty$ وعند $-\infty$ وعند -1.

2) بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=x-2$ مستقيم مقارب عند $+\infty$ و عند $-\infty$ للمنحنى (C).

3) ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم D .

4) عين أصغر عدد طبيعي n حيث من اجل كل $x\geq n$ يكون لدينا: $f(x)-(x-2)\leq\dfrac{1}{10}$

45 لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=x-\frac{2}{(x-1)^2}$$

1) بين أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

2) ادرس الوضعية النسبية لـــ (C) و Δ .

5 - الدالة المركبة

46 f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـــ:

$f(x)=x^2$ و $g(x)=3x-2$

1) الدالة h هي مركب الدالة f متبوعة بالدالة g .لتعيين $h(x)$ انقل ثم أتمم

$$x\overset{f}{\longmapsto}\square\overset{g}{\longmapsto}\square$$

عين عبارة $h(x)$.

2) عين الدالة φ مركب لدالة g متبوعة بالدالة f .

47 نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^*$ على الترتيب بـــ $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$

1) عين مجموعة تعريف كل من $f\circ g$ و $g\circ f$.

2) احسب $(f\circ g)(x)$ و $(g\circ f)(x)$.

48 اكتب الدالة f على شكل مركب دالة تآلفية ودالة مرجعية في كل حالة من الحالتين التاليتين:

أ) $f(x)=\sqrt{3-2x}$ ب) $f(x)=2-\dfrac{3}{x}$

elbassair.net

موقع البصائر التعليمي

تمارين

49 اكتب f على شكل مركب دالتين u متبوعة بـ v في كل حالة من الحالتين التاليتين:

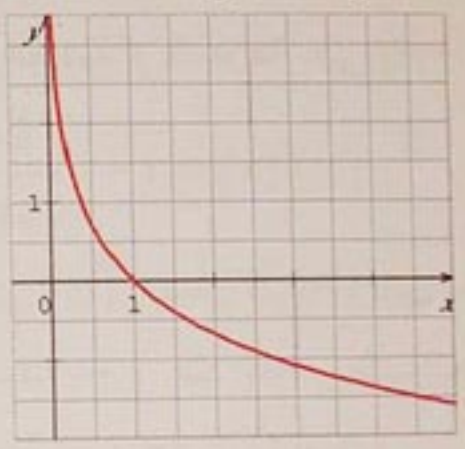
أ) $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ ب) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$

50 نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;2[$ كما يلي :

$$f(x)=\sqrt{\frac{2-x}{4x}}$$

اكتب f على شكل مركب دالتين u متبوعة بـ v .

51 الشكل التالي يمثل المنحنى البياني لدالة f معرفة على $]0;+\infty[$.في كل حالة من الحالات المقترحة أدناه عين مجموعة تعريف الدالة المركبة u حيث $u=f\circ g$ و النهايات عند حدود المجموعة.



1) $g(x)=-2x+1$ المعرفة على $\mathbb{R}$.

2) $g(x)=x^2-1$ المعرفةعلى $]1;+\infty[$

52 نفس أسئلة التمرين **51** مع :

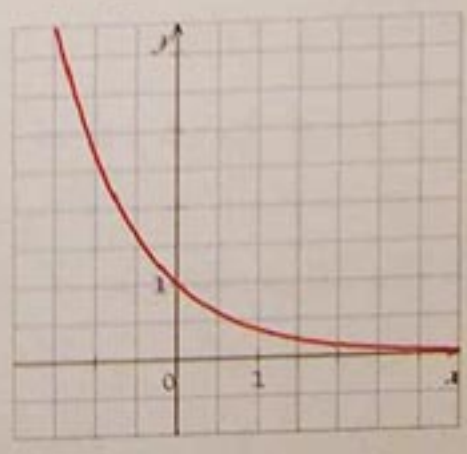
1) $g(x)=\dfrac{2}{x}$ المعرفة على $\mathbb{R}^*$

2) $g(x)=\dfrac{x}{x+1}$ المعرفة على $]-\infty;-1[$

53 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=1-x^2$$

و g هي الدالة الممثلة بمنحنيها البياني في الشكل التالي:



1) حدّد النهايات عند حدود مجموعة التعريف للدالة $\dfrac{1}{f}$

2) لتكن الدالة h حيث $h=g\circ f$

أ) بين أن الدالة h معرفة على $\mathbb{R}$.

ب) عين نهايات الدالة h عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

54 نعرف الدالة f بجدول تغيراتها التالي :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0 ↗	2 ↘	1

1) حدد مجموعة تعريف الدالة g حيث $g=\dfrac{1}{f}$

2) عين النهايات للدالة g عند حدود مجموعة تعريفها.

55 f و g دالتان معلومتان بجدولي تغيراتهما التاليين:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f(x)$	1 ↘	$\frac{1}{2}$ ↗	1 ↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘ 1

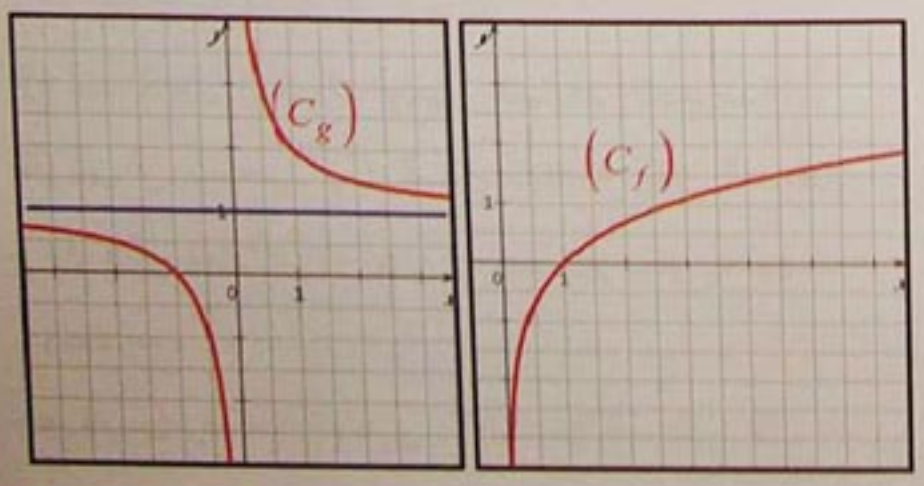
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	1	↘ ↗	1	↗ $+\infty$
			0		

1) نعتبر الدالة h حيث $h=f\circ g$

اشرح لماذا مجموعة تعريف الدالة h هي $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

2) عين نهايات الدالة h عند حدود مجموعة تعريفها.

56 (C_f) و (C_g) هما التمثيلان البيانيان للدالتين f و g كما هو مبين في الشكل المقابل:



elbassair.net

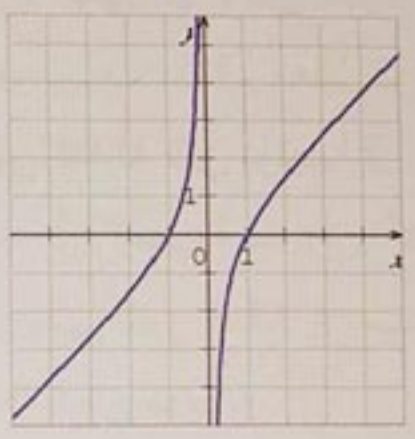
1) بين أن الدالة h حيث $h=f\circ g$ معرفة على المجموعة $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$

2) عين النهايات للدالة h عند حدود مجموعة تعريفها

57 نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على الترتيب على $]0;+\infty[$ و $\mathbb{R}^*$ حيث الدالة f معلومة بجدول تغيراتها التالي:

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

و الدالة g معلومة بتمثيلها البياني (C_g) المبين في الشكل التالي:



1) بين أن مجموعة تعريف الدالة h حيث $h=f\circ g$ هي $D_h=[-1;0[\cup[1;+\infty[$

2) احسب نهايات الدالة h عند حدود مجموعة تعريفها.

58 علما أن :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ،

عين $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\circ f)(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ f)(x)$

59 علما أن :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ،

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

عين $\lim\limits_{x\to+\infty}(g\circ f)(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}(g\circ f)(x)$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ g)(x)$

60 نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$h(x)=\sqrt{2x^2-5x+1972}$$

1) عبر عن h كمركب دالتين (f متبوعة بـــ g) يطلب تعيينهما.

2) عين $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3) استنتج $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$

61 لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ :

$$f(x)=\left(1-\frac{2}{x^2}\right)^3$$

1) اكتب f كمركب دالتين .

2) استنتج نهاية الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

3) ما هي التفسيرات البيانية التي تستنتجها بالنسبة للمنحنى الممثل للدالة f.

62 باستعمال نهاية مركب دالتين،عين النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{2x+1}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x+1}$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ ،

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\sqrt{\frac{2x}{1-x}}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} 2\sqrt{x^2-1}+5$ ، $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}2} 1-\sqrt{4-x^2}$

63 علما أنه من اجل كل $x\in]0;+\infty[$:

$0\le f(x)\le\frac{1}{x}$ ، ما هي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؟

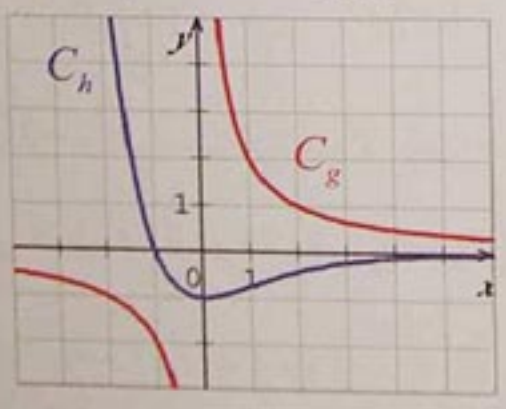
64 علما أنه من اجل كل $x\in[0;+\infty[$:

$\frac{x}{x+2}\le f(x)\le\frac{x+1}{x}$ ، ما هي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؟

65 علما أنه من اجل كل $x\in\mathbb{R}$:

$f(x)\le -2x^3$ ، ما هي $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

66 الشكل الموالي هو التمثيل البياني C_h لدالة h معرفة على $\mathbb{R}$ والمنحني C_g هو المنحني الذي معادلته: $y=\frac{2}{x}$



نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ حيث:

من أجل $x\ge 1$ ، $h(x)\le f(x)\le\frac{2}{x}$

و من أجل $0<x\le 1$ ، $f(x)\ge\frac{2}{x}$

و من أجل $x\le -1$ ، $f(x)\ge h(x)$

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

تمارين

• عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها إذا كان ذلك ممكنا.

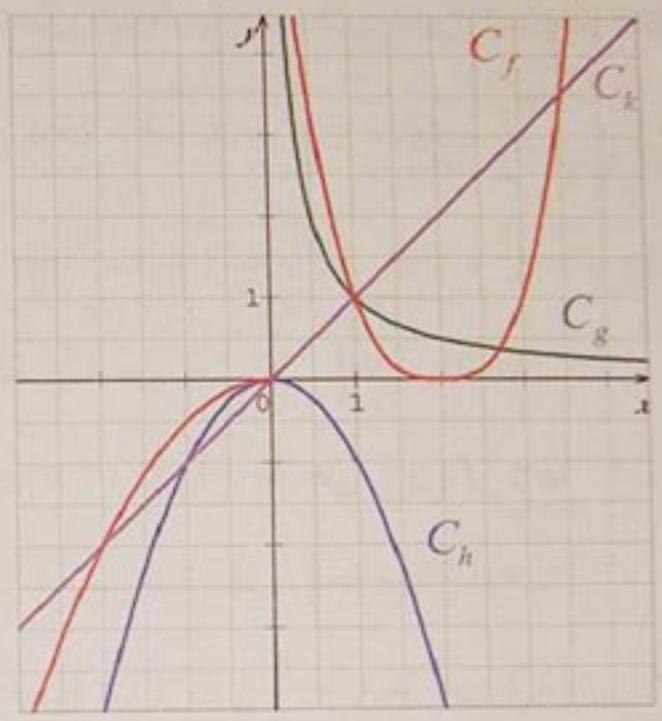
67 بين أنه من أجل $x \in]0;+\infty[$: $\frac{2}{x} \geq \frac{x}{1+x^2}$

استنتج نهاية $\frac{x}{1+x^2}$ عندما يؤول x إلى $+\infty$.

68 في الشكل التالي نمثل الدوال f ، g ، h و k حيث:

$g(x)=\frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$

$h(x)=-x^2$ و $k(x)=x$



أتمم الجمل التالية و استنتج نهايات الدالة f بالمقارنة

1) من أجل $x \geq 3,5$: $f(x) \geq \ldots.$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ldots.$

2) من أجل $0 < x \leq 1$:

$f(x) \geq \ldots.$ إذن $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} f(x) = \ldots.$

3) من أجل $x \leq -2$: $f(x) \leq \ldots.$ إذن .....

69 نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

1) برر مجموعة تعريف الدالة f .

2) جد دالتين g و h بحيث تكون f مركب g متبوعة بـ h

3) ادرس إذن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4) من أجل $x > 2$ قارن بين $\sqrt{x^2-4}$ و x .

• استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-4}-2x$.

70 نعتبر الدالة f المعرفة من أجل كل عدد حقيقي $x > 1$ بـ: $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+1}}$

1) بين أنه إذا كان $x > 1$ فإن: $\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$

2) استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

تمارين للتعمق

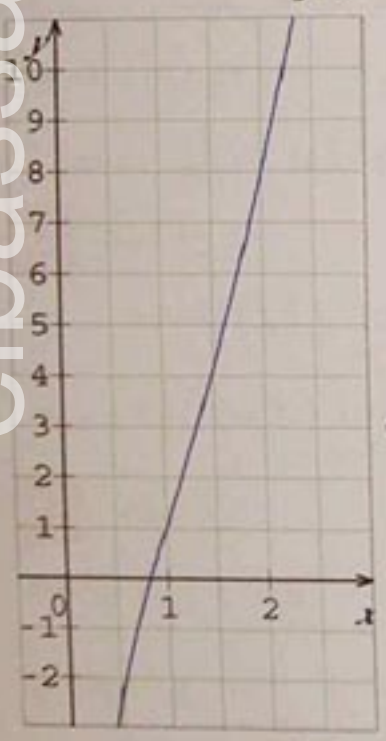
71 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ،على المجال $[1;+\infty[$ منحنيها البياني هو نصف مستقيم معامل توجيهه 1 ويقطع محور التراتيب في النقطة التي ترتيبها 2 .

على المجال $]-\infty;1[$ f معرفة بـ $f(x)=-x^2+m$

1. كيف تختار m حتى تكون الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ ؟

2. مثل بيانيا الدالة f في معلم .

72 f هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ و تمثيلها البياني في الشكل المقابل



1. بقراءة بيانية احسب

أ) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ، ب) $f(1)$

ج) $f(2)$ ، د) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. نقبل أن من اجل كل عدد حقيقي موجب تماما x:

$f(x)=ax^2+b-\frac{2}{x}$

حيث a و b عددان حقيقيان

• عين a و b باستعمال المعلومات السابقة.

3. بين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α محصورا بين 0 و 1 .

• عين حصرا لـ α سعته 10^{-2}

• استنتج إشارة $f(x)$.

73 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=-\frac{1}{x}$

و g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=\frac{1}{3}x^2+x+3$

elbassair.net

1.أ) باستعمال الحاسبة البيانية خمن عدد نقط تقاطع المنحنيين لممثلين للدالتين f و g .

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x :

$f(x)=g(x)$ معناه $\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+1=0$

2.نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ

$$h(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+3x+1$$

أ) ادرس تغيرات h على $\mathbb{R}$.

ب) احسب $h(-1)$ و $h(0)$

ج) بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا واحدا في $\mathbb{R}$.باستعمال لحاسبة البيانية ، أعط حصرا لهذا الحل سعته 10^{-2}

74 إليك جداول التغيرات لأربع دوال f ، g ، h و k

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	1

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g(x)$	0	$\searrow$	$g(-1)$	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	0

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$h(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$h(0)$	$\searrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\searrow$	1

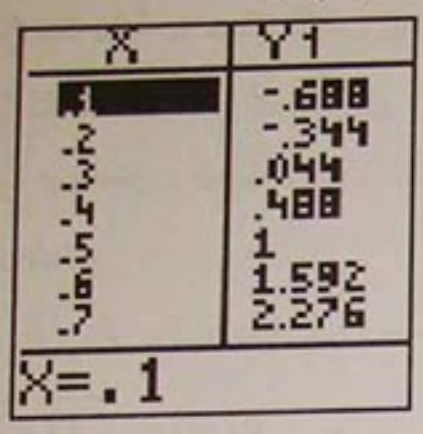
x	$-\infty$		α		-1		β		$+\infty$
$k(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$k(\alpha)$	$\searrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\searrow$	$k(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

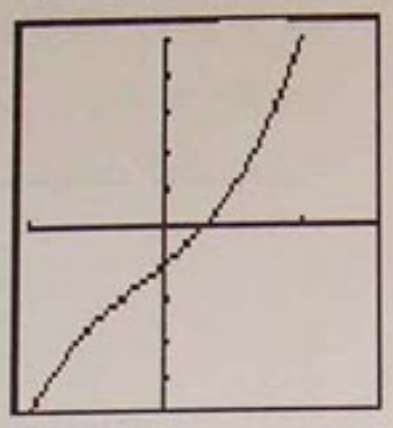
أرفق بكل جدول دالة من الدوال التالية:

① $x \mapsto \frac{x^2+2}{x^2-4}$ ، ② $x \mapsto 1+\frac{2}{x-3}$ ③ $x \mapsto x+\frac{2}{x+1}$ ، ④ $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$

75 الحاسبة البيانية أظهرت الشاشتين التاليتين عند رسم منحني الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=2x^3+x^2+3x-1$$





1. بقراءة بيانية اشرح لماذا المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α ؟

2. ما هو الحصر الذي يمكن إعطاؤه لـ α ؟

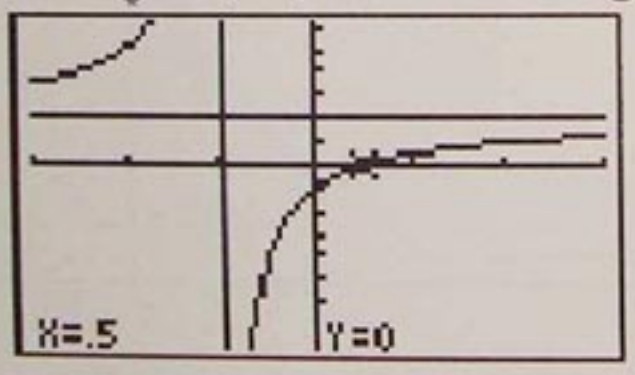
3. g هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x$$

أ) احسب $g'(x)$.

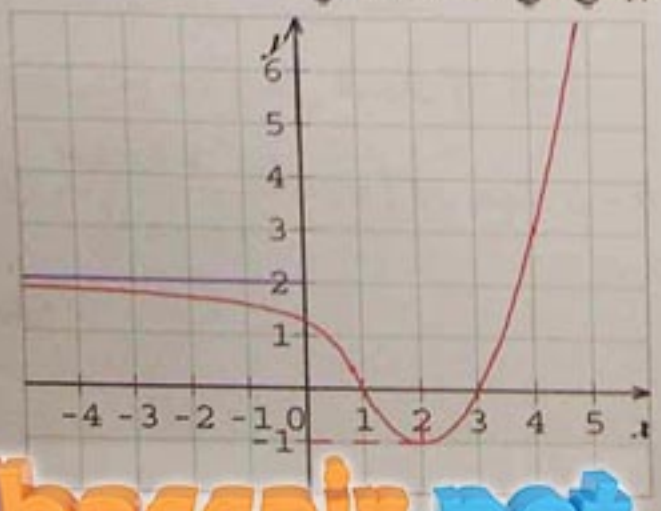
ب) استنتج تغيرات g .

76 f هي دالة من الشكل $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ ، تمثيلها البياني على شاشة الآلة الحاسبة هو التالي:



• عين عبارة $f(x)$

77 لتكن الدالة f المعرفة و المستمرة على $\mathbb{R}$ و C_f هو تمثيلها البياني في الشكل التالي



elbassair.net
موقع البصائر التعليمي

تمارين

1. شكل جدول تغيرات الدالة f مبينا فيه النهايات و القيمة الحدية للدالة f و نقط تقاطع C_f مع محور الفواصل.

2. g هي الدالة المعرفة بـ $g(x)=\left[f(x)\right]^2$

أ) بين لماذا g معرفة على $\mathbb{R}$ ؟

ب) جد دالة u حيث تكون g مركب الدالة f متبوعة بـ u.

ج) باستعمال السؤال السابق ، ادرس نهايات g عند $-\infty$ و عند $+\infty$ ، ثم حدد معادلات المستقيمات المقاربة المحتملة.

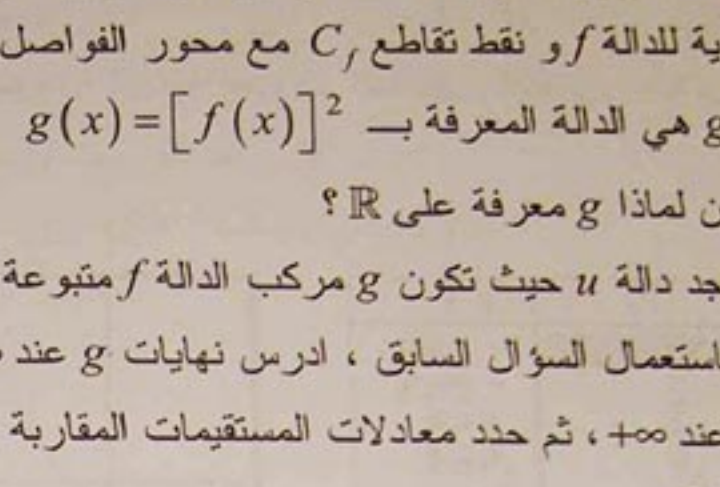
2. h و k دالتان معرفتان بـ:

$$h(x)=\sqrt{f(x)} \quad \text{و} \quad k(x)=\frac{1}{f(x)}$$

أ) حدد مجموعة تعريف كل من h و k .

ب) ادرس النهايات للدالتين h و k عند حدود مجموعة تعريفهما ثم عين معادلات المستقيمات المقاربة المحتملة لتمثيليهما البيانيين.

78 نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;2[$ و C_f هو تمثيلها البياني في الشكل المقابل، نقبل أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=1$ و المستقيم Δ' الذي معادلته $x=2$ مستقيمان مقاربان للمنحنى C_f .



انطلاقا من هذا التمثيل البياني عين:

أ) نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى 2.

نهاية $f(x)$ عندما يؤول x إلى $-\infty$.

2. شكل جدول تغيرات f على المجال $]-\infty;2[$.

3. نقبل أن $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{(2-x)^2}$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية .

بحساب نهاية $\dfrac{ax^2+bx+c}{(2-x)^2}$ عندما يؤول x إلى $-\infty$ ، بين أن $a=1$

4. بقراءة بيانية للمنحنى احسب $f(-2)$ و $f(1)$

- استنتج جملة لمعادلتين ذات المجهولين b و c.
- حل هذه الجملة و عبر عن $f(x)$ بدلالة x .

مسائل

79 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-2;-1\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{3x^2+9x+7}{x^2+3x+2}$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.الوحدة $1cm$

1) عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{-1;3\}$: $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}+\dfrac{c}{x+2}$

2) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

3) استنتج معادلات للمستقيمات المقاربة للمنحنى (C).

4) D مستقيم معادلته $y=3$.ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى D.

4) احسب $f'(x)$ و استنتج تغيرات الدالة f .

- شكل جدول تغيرات f .

5) بين أنه من أجل كل $\mathbb{R}-\{-2;-1\}$: $f(-3-x)=f(x)$.ماذا يمكن أن تستنتج؟

6) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنى (C) مع محور الفواصل.

7)أنشئ المنحنى (C) و المستقيمات المقاربة.

8) U متتالية معرفة من اجل كل عدد طبيعي $n\geq 0$ بـ :

$$u_n=3-f(n)$$

أ) مثل الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .

ب) احسب المجموع $S_n=u_1+u_2+.....+u_n$.

ج احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

elbassair.net

80 لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$

C_f المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

ب) ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول التغيرات.

2) أ) عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c و d بحيث من أجل كل $x\in\mathbb{R}-\{1\}$:

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{(x-1)^2}$$

ب) استنتج أن C_f يقبل المستقيم D الذي معادلته $y=x-2$ كمستقيم مقارب.

ج) حدد وضعية C_f بالنسبة إلى D .

3) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α في المجال $]-\infty;1[$. استنتج حصرا لـ α بتقريب 10^{-2} .

4) أنشئ D و C_f في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة $2cm$ على محور الفواصل و $1cm$ على محور التراتيب)

5) استنتج بيانيا و حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$

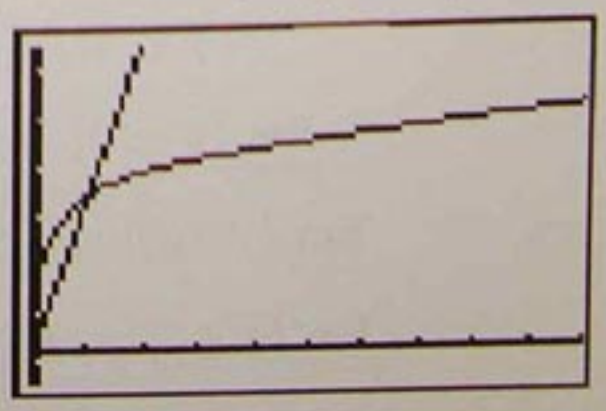
81 **الجزء1:**

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^3+32x^2+61x+10}{(x+1)^2}$$

و (C) تمثيلها البياني في معلم مختار

تحصلنا على المنحنى (C) بحاسبة بيانية باستعمال النافذة $x\in[0;10]$ و $y\in[-5;50]$



1) تحقق أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل:

$$f(x)=x+30-\frac{20}{(x+1)^2}$$

استنتج تغيرات الدالة f على المجال $[0;+\infty[$

2) ليكن D المستقيم الذي معادلته $y=x+30$

ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم D .

3) ارسم (C) و D في معلم متعامد من اجل $x\in[0;10]$

3) حل بيانيا المعادلة $f(x)=26x$ ، ثم تحقق من ذلك بالحساب .

الجزء2:

مؤسسة تنتج و تبيع أسلاك كهربائية (*câbles*) ، تصنع على الأكثر $10km$ من الأسلاك شهريا ، الكلفة الإجمالية للإنتاج مقدرة بمئات الآلاف من الدنانير لصنع $q\,km$ من الأسلاك معطاة بالعلاقة:

$$C(q)=q+30-\frac{20}{(q+1)^2}$$

كل كيلومتر من الأسلاك يباع بـ $26000DA$

1) حدد الكلفة الثابتة ، أعط اتجاه تغير الكلفة الإجمالية.

2)عين دالة الدخل لهذه المؤسسة إذا باعت إنتاجها.

3) باستعمال التمثيل البياني المحصل عليه في الجزء1-2)، اقرأ كمية الأسلاك التي تنتج حتى تكون الفائدة موجبة أو معدومة.

4) بين أن دالة الفائدة المحققة من أجل الإنتاج و البيع لـ $q\,km$ معطاة بالعلاقة:

$$B(q)=\frac{5(q-1)(5q^2+9q+2)}{(q+1)^2}$$

جد جبريا عدد الوحدات المنتجة حتى تكون الفائدة محققة.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

اختبر معلوماتك

اختيار من متعدد

82 الأسئلة من 1 إلى 5 تتعلق بجدول تغيرات دالة f

(الجدول الموالي) معرفة على $\mathbb{R}-\{5\}$ و C هو التمثيل البياني لها في معلم متعامد للدالة f

x	$-\infty$		1		5		11		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	3	↘	-1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	7	↘	$-\infty$

1) من ملاحظتك للجدول:

أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$ ب) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-\infty$

ج) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}5} f(x)=-\infty$ د) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

2) المنحنى C:

أ) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا ب) يقبل مستقيما مقاربا مائلا.

ج) لا يقبل أي مستقيم مقارب عمودي

د) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين مختلفين

3) في النقطة التي فاصلتها 1 المنحنى C :

أ) يقبل مماسا معادلته $x=-1$

ب) يقبل مماسا معادلته $y=-1$

ج) لا يقبل مماسا أفقيا.

د) يقبل مماسا معادلته $y=x-1$

4) على المجموعة $\mathbb{R}-\{5\}$ المعادلة :

أ) $f(x)=2$ تقبل على الأكثر ثلاثة حلول.

ب) $f(x)=-1$ تقبل بالضبط حلا واحدا.

ج) $f(x)=-5$ لا تقبل أي حل.

د) $f(x)=7$ تقبل بالضبط حلين.

5) انطلاقا من مركب دالتين:

أ) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=3$

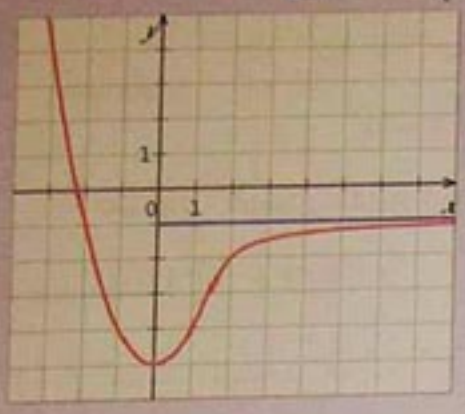
ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)}=3$

ج) الدالة $x\mapsto[f(x)]^2$ معرفة على $\mathbb{R}$

د) $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}5}\sqrt{f(x)}=+\infty$

صحيح أم خاطئ

83 f دالة حيث تمثيلها البياني مبين في الشكل المقابل



نعتبر الدالة u حيث $u=f\circ g$

و g هي الدالة المعرفة في

كل حالة من الحالات

المقترحة أدناه ، المطلوب الإجابة بصحيح أو خاطئ على

ما يلي دون تبرير

1) من أجل $g(x)=2x+3$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ g)(x)=-1$

2) من أجل $g(x)=-x^2$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}(f\circ g)(x)=-1$

3) من أجل $g(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$ ، $\lim\limits_{x\to1}(f\circ g)(x)=1$

4) من أجل $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\circ g)(x)=-1$

5) من أجل $g(x)=-2+\dfrac{1}{x^2-1}$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\circ g)(x)=-4$

84 نعتبر الدالتين f و g المعرفتين بجدولي تغيراتهما كما يلي :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	-4	↗	$+\infty$

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	—	1	↗	2	↘	-2	↗	0

أكد صحة أو خطأ العبارات التالية:

1) $(g\circ f)(0)=1$

2) $(f\circ g)(1)=0$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(g\circ f)(x)=0$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\circ g)(x)=+\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}(f\times g)(x)=+\infty$

elbassair.net

3 الاشتقاقية 3

الكفاءات المستهدفة

- دراسة اتجاه تغير دالة.
- حساب مشتقة دالة مركبة.

منذ القرن التاسع عشر استعان الاقتصاد بالرياضيات لدراسة المعطيات العددية وبناء نماذج.

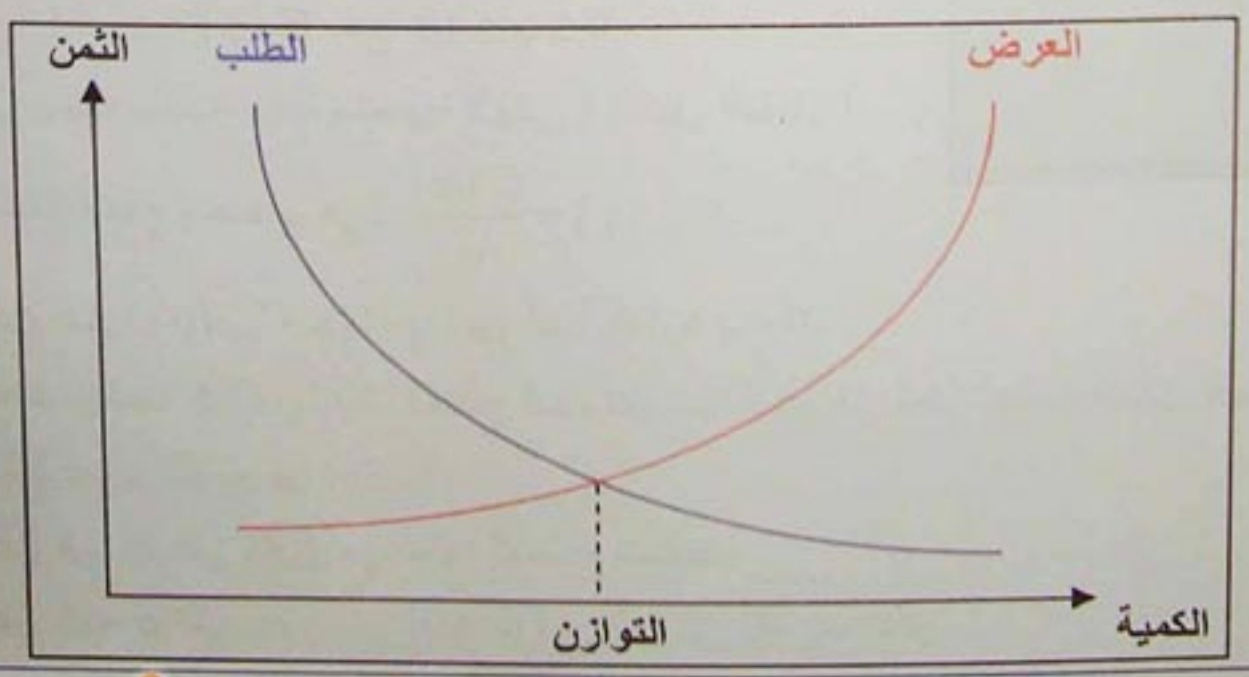
الاقتصاديات الصغرى (*Micro – économie*) هي فرع الاقتصاد أكثر استعمالا للرياضيات. فهي تعتبر الاقتصاد كموعد، في سوق، يلتقي فيه المستهلك و المنتج بهدف الموازنة بين طلب الأول و عرض الثاني.

في هذه النظرية تندرج دوال الكلفة الإجمالية، المتوسطة و الهامشية إضافة إلى دوال العرض و الطلب ...

في نظرية الاقتصاديات الصغرى ،تم تطوير التوازن الجزئي للنموذج الاقتصادي " **العرض والطلب** " أصلاً من قبل ألفريد مارشال وهو نموذج يُحاولُ وَصْف، توضيح و توقع تغير سعر وكمية السلع المباعة في الأسواق التنافسية.

إنّ النموذجَ يقوم فقط أولاً بتقريب وَصْف السوقَ التنافسيةَ بشكل غير كامل.

يضم هذا النموذج الكثير من النظرياتَ المستعملة من قبل بَعْض الاقتصاديين قبل مارشال و يشكل أحد أكثر النماذجِ الأساسيةِ أهمية في بَعْض المَدارسِ الاقتصادية الحديثةِ، فهو كثير الاستعمال في بناء أساس تشكيلة واسعة من النماذج والنظريات الاقتصادية أكثرِ تفصيلا. إنّ نظريةَ العرض والطلب مهمّة لفَهْم الكثير من المَدارسِ الاقتصادية لآلية اقتصاد السوق و تفسير الآليات التي يتم بها تخصيص المصادر و اتخاذ القرارات .

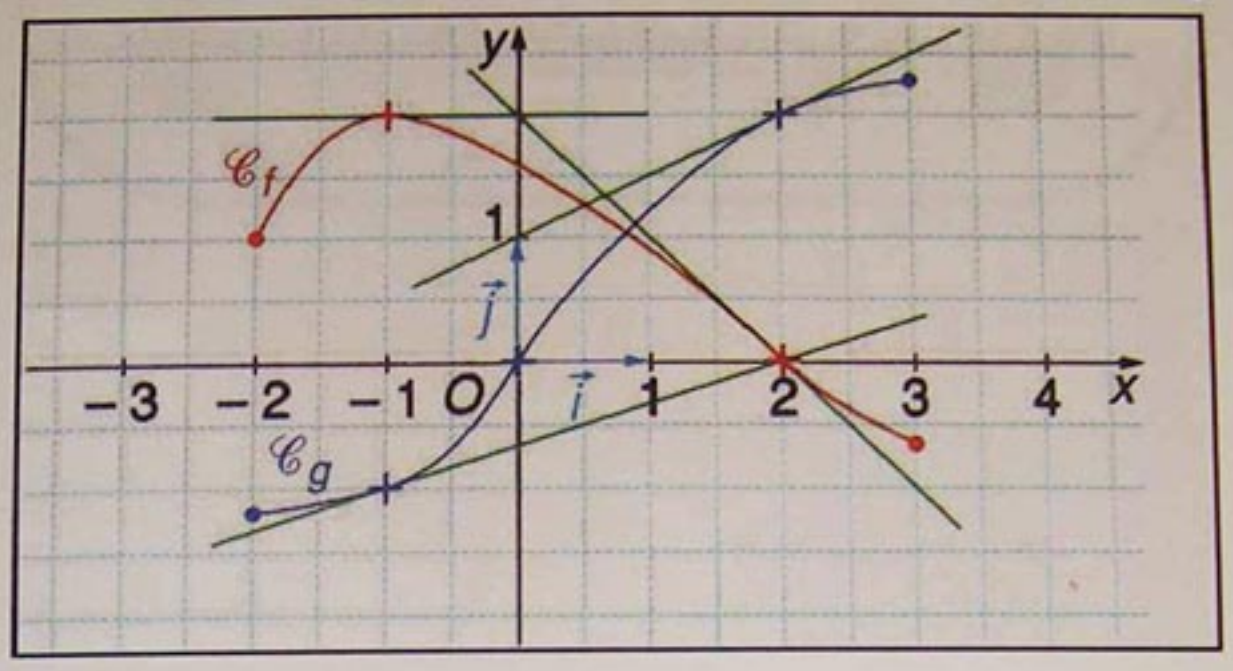


موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

النشاط الأول

رسمنا في الشكل الموالي المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين لدالتين f و g معرفتين و قابلتين للاشتقاق على المجال $[-2;3]$ و بعض مماساتهما.



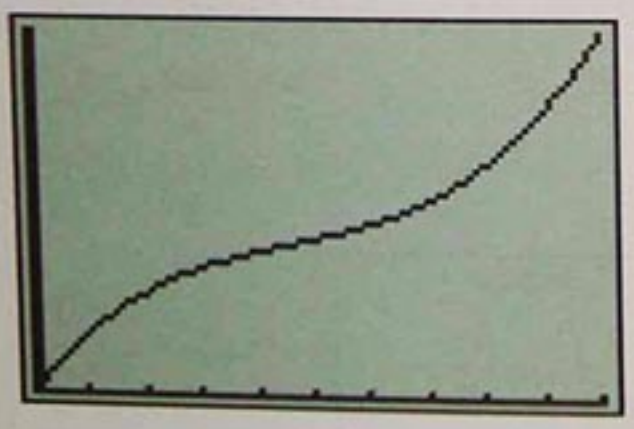
1. أحسب الأعداد المشتقة التالية:

- $(f)'(-1)$ * $(g)'(-1)$ * $(f)'(2)$ * $(g)'(2)$ *
- $(f+g)'(-1)$ * $(fg)'(2)$ * $\left(\frac{3}{f}\right)'(-1)$ * $\left(\frac{f}{g}\right)'(2)$ *

2. من أجل كل x من المجال $[0;2]$ نضع: $h(x)=f(2x-1)$

أحسب $h'(0)$ و $h'\left(\frac{3}{2}\right)$.

النشاط الثاني



تنتج إحدى المصانع منتوجا .الكلفة الإجمالية لصنع كمية q من هذا المنتوج و المقدرة بـ DA معطاة بـ:

$$C(q)=q^3-14q^2+80q \quad \text{مع} \quad 0\le q\le 10$$

و قد مثلنا على شاشة حاسبة بيانية منحنيها البياني (الشكل المقابل).

1. الكلفة المتوسطة لإنتاج وحدة q هي: $C_M(q)=\frac{C(q)}{q}$

- عين عبارة $C_M(q)$ بدلالة q من أجل $0<q\le 10$.
- أحسب مشتقة الدالة C_M ثم استنتج اتجاه تغيراتها.أرسم في معلم متعامد التمثيل البياني للدالة C_M.

2. نفرض أن ثمن بيع وحدة q هو $32DA$.

- عين قيم q التي يكون من أجلها المصنع مستفيدا.
- عين قيمة q التي يكون من أجلها الربح الإجمالي أكبر ما يمكن.

elbassair.net

النشاط الثالث

u و v دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ $u(x)=x^2+x+1$ و $v(x)=x^3+2$

1) تعيين الدالة المركبة $v\circ u$

لدينا المخطط التالي: $a \xrightarrow{u} b=u(a) \xrightarrow{v} v(b)=v\circ u(a)$

- بين أن الدالة $v\circ u$ معرفة على $\mathbb{R}$.
- من أجل كل عدد حقيقي a، عبر بدلالة a عن $v\circ u(a)$.

2) حساب $u'(a)$ و $v'(b)$

- الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و الدالة v قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. عين الدالتين u' و v'.
- ارسم و أتمم الجدول الموالي (تدور النتائج إلى 10^{-3}). يمكنك استعمال مجدول أو حاسبة بيانية.

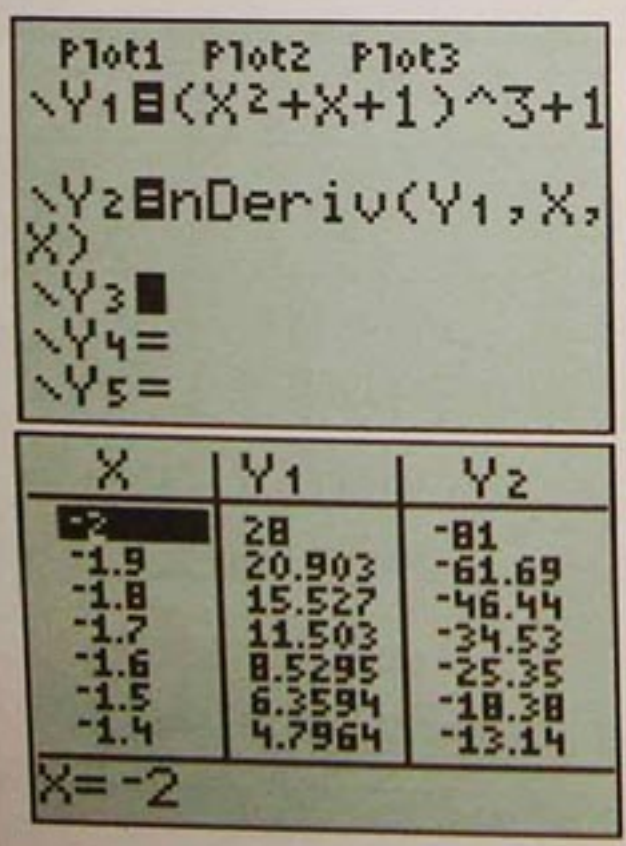
	A	B	C	D
1	a	b=u(a)	u'(a)	v'(b)
2	-2			
3	-1,5			
4	-1			
5	-0,5			
6	0			
7	0,5			
8	1			
9	1,5			
10	2			

3) حساب $(v\circ u)'(a)$

- أنقل ثم باستعمال حاسبة بيانية أتمم الجدول الموالي:

(تدور النتائج إلى 10^{-3})

a	$(v\circ u)'(a)$
−2	
−1,5	
−1	
−0,5	
0	
0,5	
1	
1,5	
2	



- خمن علاقة بين $u'(a)$ ، $v'(b)$ من جهة و $(v\circ u)'(a)$ من جهة ثانية.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

ـ الاشتقاقية (تذكير)

1. العدد المشتق ـ الدالة المشتقة

تعريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$. a و $a+h$ عددان حقيقيان من I مع $h \neq 0$.

القول أن f تقبل الاشتقاق عند a يعني أنه لما يؤول h إلى0 النسبة $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ تؤول إلى عدد حقيقي نرمز له بالرمز $f'(a)$ و يسمى العدد المشتق للدالة f عند a.

ملاحظة: إذا قبلت الدالة f الاشتقاق عند كل عدد حقيقي x من I نقول أنها تقبل الاشتقاق على I و تسمى الدالة $f': x \mapsto f'(x)$ الدالة المشتقة للدالة f.

2. التفسير البياني ـ التفسير الاقتصادي

- **التفسير البياني**

إذا قبلت f الاشتقاق عند a فإن تمثيلها البياني (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا معامل توجيهه $f'(a)$ و معادلته: $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

- **التفسير الاقتصادي**

الكلفة الهامشية للإنتاج هي تزايد الكلفة الناتج عن صنع وحدة إضافية. تعطى الكلفة الهامشية بالعلاقة:
$C_m(q) = C(q+1)-C(q)$ حيث C هي الدالة " الكلفة الإجمالية " نلاحظ أن $C'(q)$ هو تقريب جيد لـ $C_m(q)$.
في الاقتصاد نضع $C_m(q) = C'(q)$ حيث C' هي الدالة المشتقة للدالة الكلفة الإجمالية C.

3. قواعد الاشتقاق ـ العمليات على المشتقات

- **قواعد الاشتقاق**

$f(x)$	a	x	$(n \geq 2 \text{ و } n \in \mathbb{N})\ x^n$	$1/x$	$(n \in \mathbb{N}^*)\ 1/x^n$	$\sqrt{x}$
$f'(x)$	0	1	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
مجالات قابلية الاشتقاق	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$	$]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$	$]0;+\infty[$

- **العمليات على المشتقات**

u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

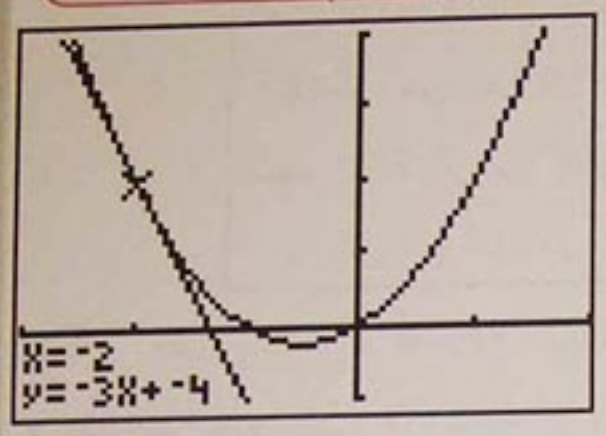
الدالة	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$ ← (الدالة v لا تنعدم على I)	$\frac{u}{v}$
المشتقة	$u'+v'$	ku'	$u'v+v'u$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

elbassair.net

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^2+x$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1. مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحني (C_f) و (Δ) مماس (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة (-2).
2. عين معادلة لـ (Δ).

طريقة: لإيجاد معادلة (Δ) مماس (C_f) عند النقطة $A(a;f(a))$ يمكن تطبيق دستور المماس في الحالة العامة كما يمكن تعيين معامل التوجيه $f'(a)$ ثم حساب الترتيب عند المبدأ باستعمال الإحداثيات $(a;f(a))$.



الحل

1. أنظر الشكل المقابل.
2. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=2x+1$

و منه $f'(-2)=-3$ و بالتالي فإن معادلة (Δ) هي من الشكل $y=-3x+b$

و بما أن النقطة $A(-2;2)$ تنتمي إلى (Δ) فإن $2=-3(-2)+b$

و منه $b=-4$. معادلة (Δ) هي إذن: $y=-3x-4$.

كان بالإمكان تطبيق الدستور: $y=f'(a)(x-a)+f(a)$ مع $a=-2$.

تمرين محلول2: الكلفة الإجمالية لصنع كمية q من منتوج و المقدرة بـ DA معطاة بـ:

$$C(q)=\frac{1}{3}q^3-5q^2+30q+10 \quad \text{مع} \quad 0\le q\le 30$$

كما أن ثمن بيع وحدة q هو $105\,DA$.

1. عين C_m الدالة " الكلفة الهامشية " .
2. ما هي الكمية المنتجة q التي تكون من أجلها الكلفة الهامشية مساوية لـ $105\,DA$.
3. مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحنيين الممثلين للدالتين " الكلفة الإجمالية " و " المدخول الإجمالي "
4. أعط تفسيرا بيانيا لنتيجة السؤال 2.

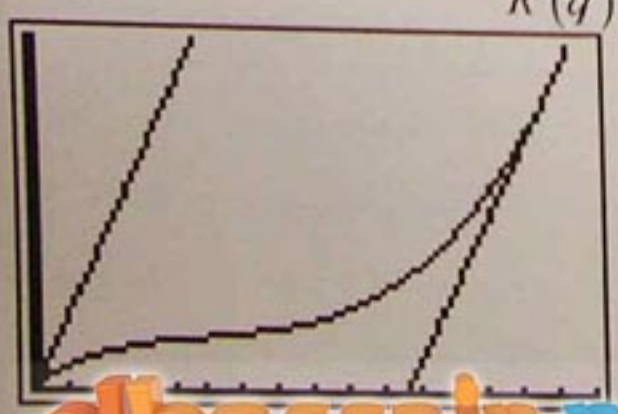
الحل

1. من اجل كل q من $[0;30]$ لدينا: $C_m(q)=C'(q)=q^2-10q+30$
2. $C_m(q)=105$ تعني $q^2-10q+30=105$ أي $q^2-10q-75=0$

تقبل هذه المعادلة حلين هما على التوالي -5 و 15 و بما أن q عنصر من $[0;30]$ فإن $q=15$.

تكون إذن الكلفة الهامشية مساوية لثمن بيع وحدة q من أجل إنتاج 15 وحدة.

3. الدالة المدخول الإجمالي هي الدالة R المعرفة على $[0;30]$ بـ $R(q)=105q$
4. نتيجة السؤال2 تعني أن $C'(q)=15$ و يفسر ذلك بيانيا بأن مماس المنحني الممثل للدالة " الكلفة الإجمالية " عند النقطة التي فاصلتها 15 يكون موازيا للمستقيم الممثل للدالة R.



elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

لـ دراسة دالة

1. المشتقة و اتجاه التغيرات

مبرهنة (دون برهان): f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)>0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متزايدة تماما على I.
* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)<0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدالة f من أجلها، فإن الدالة f متناقصة تماما على I.
* إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x)=0$ فإن الدالة f ثابتة على I.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2-3$

f دالة كثير حدود فهي إذن قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x)=12x^3-24x^2+12x$

بعد التحليل نجد أن: $f'(x)=12x(x-1)^2$

من أجل $x\in]-\infty;0]$، $f'(x)<0$ و من أجل $x\in[0;+\infty[$، $f'(x)>0$

بالإضافة إلى ما سبق لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و منه جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	-2	↗	$+\infty$

2. القيم الحدية المحلية

تعاريف: f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.

* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\le f(x_0)$.
* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية صغرى للدالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x)\ge f(x_0)$.
* القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية لـ f يعني أن $f(x_0)$ قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى.

مثال: نعتبر نفس معطيات المثال السابق.

* نلاحظ من جدول تغيرات الدالة f أن $f(0)=-3$ هي قيمة حدية محلية صغرى لـ f لأنه يوجد على الأقل مجال مفتوح(مثلا $]-1;+1[$) محتوى في $\mathbb{R}$ و يشمل0 بحيث من أجل كل x من $]-1;+1[$، $f(x)\ge f(0)$.
* $f(1)=-2$ ليس قيمة حدية للدالة f.

elbassair.net

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+3}$

أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

الحل

الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$. لدينا من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=\dfrac{-x^2-2x+3}{\left(x^2+3\right)^2}$

بما أن $\left(x^2+1\right)^2>0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $-x^2-2x+3$ الذي يقبل جذرين هما 1 و 3-.

إذن f متناقصة تماما على كل من $]-\infty;-3[$ و $]1;+\infty[$ و متزايدة تماما على المجال $[-3;1]$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ كما أن $f(1)=\frac{1}{2}$ و $f(-3)=-\frac{1}{6}$ و منه جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{6}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

تمرين محلول2: يعطى الربح بـ DA المحقق من قبل أحد المصانع بعد بيع كمية q من منتوج بالعلاقة:

$B(q)=-0,1q^2+200q-25000$ حيث $0\le q\le 1500$

1. أدرس تغيرات الدالة B على المجال $[0;1500]$ ثم استنتج أكبر ربح يمكن تحقيقه من طرف المصنع محددا في هذه الحالة الكمية q المباعة.
2. مثل على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني للدالة B .

الحل

1. لدينا من أجل كل q من $[0;1500]$، $B'(q)=-0,2q+200$ و لدينا:

$B'(q)=0$ من أجل $q=1000$ و منه جدول إشارة $B'(q)$

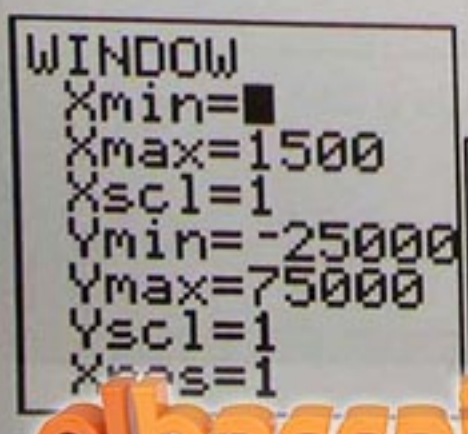
q	0		1000		1500
$B'(q)$		$+$	0	$-$	

نستنتج أن الدالة B متزايدة تماما على $[0;1000]$ و متناقصة تماما على $[1000;1500]$

و بالتالي فهي تقبل قيمة حدية عظمى من أجل $q=1000$. لدينا $B(1000)=75000$

إذن أكبر ربح يمكن تحقيقه هو $75000DA$ بعد بيع 1000 وحدة.

2. انظر الشكل المقابل.



elbassair.net

ـ اشتقاق دالة مركبة دالتين

1. مشتقة الدالة $v \circ u$

مبرهنة (دون برهان): إذا قبلت الدالة u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و قبلت الدالة v الاشتقاق على $u(I)$ فإن الدالة $v \circ u$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا:

$$(v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x)$$

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2(x^2+1)^3 - 3$

نلاحظ أن $f = v \circ u$ حيث $u : x \mapsto x^2+1$ و $v : x \mapsto 2x^3 - 3$ و منه $f'(x) = v'(x^2+1) \times u'(x)$

بعد الحساب نجد: $f'(x) = 6(x^2+1)^2 \times 2x = 12x(x^2+1)^2$

2. نتائج

- مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و كانت موجبة تماما على I فإن الدالة $\sqrt{u}$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \sqrt{x^2+2}$

نلاحظ أن $f = \sqrt{u}$ مع $u(x) = x^2+2$. و بما أن u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $u(x) > 0$

فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

- مشتقة الدالة $x \mapsto [u(x)]^n$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 2$)

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ فإن الدالة u^n تقبل الاشتقاق على I و لدينا:

$$\left(u^n\right)' = nu'u^{n-1}.$$

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = (2x^2 - 3x + 3)^3$

نلاحظ أن $f = u^3$ مع $u(x) = 2x^2 - 3x + 3$. و بما أن u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

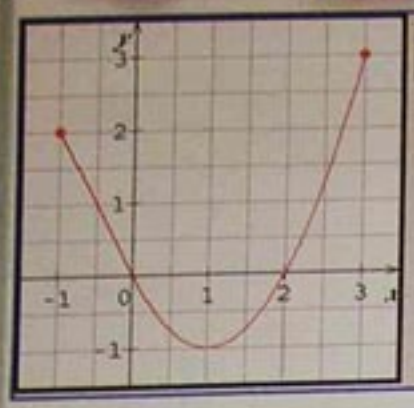
و لدينا: $f'(x) = 3(4x-3)(2x^2-3x+3)^2$

- مشتقة الدالة $x \mapsto \dfrac{1}{[u(x)^n]}$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 1$)

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و لا تنعدم على I فإن الدالة $\dfrac{1}{u^n}$ تقبل الاشتقاق على I و لدينا: $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$.

البرهان: أنظر التمرين رقم 56 .

elbassair.net



تمرين محلول1: التمثيل البياني المقابل هو لدالة g معرفة و قابلة للاشتقاق على $[-1;3]$

1. عين بيانيا إشارة $g(x)$ ثم إشارة $g'(x)$.
2. نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;3]$ بـ $f(x)=[g(x)]^2$.
أحسب $f'(x)$ بدلالة $g(x)$ و $g'(x)$ ثم استنتج إشارة $f'(x)$.

الحل

1. نلاحظ أن منحنى الدالة g يقع فوق محور الفواصل من أجل $x\in[-1;0]\cup[2;3]$ و تحته من أجل $x\in[0;2]$ و منه $g(x)\geq 0$ من أجل $x\in[-1;0]\cup[2;3]$ و $g(x)\leq 0$ من أجل $x\in[0;2]$.

بما أن الدالة g متناقصة تماما على $[-1;1]$ و متزايدة تماما على $[1;3]$ و تقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة1 فإن $g'(x)<0$ من أجل $[-1;1[$ و $g'(x)>0$ من أجل $x\in]1;3]$ و $g'(1)=0$.

2. الدالة g معرفة و قابلة للاشتقاق على $[-1;3]$ و منه فالدالة $f=g^2$ معرفة و قابلة للاشتقاق على $[-1;3]$ و لدينا: $f'(x)=2g'(x)g(x)$. باستعمال الجدول الموالي نحصل على إشارة $f'(x)$

x	-1		0		1		2		3
$g(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

تمرين محلول2: عين مشتقات الدوال الآتية:

1. $f:x\mapsto\left(2x^2-x+3\right)^4$ على $\mathbb{R}$.
2. $g:x\mapsto\dfrac{1}{\left(x^2-1\right)^3}$ على $]1;+\infty[$.
3. $h:x\mapsto\sqrt{x^2-4}$ على $]2;+\infty[$.

الحل

1. نلاحظ أن $f=u^4$ مع $u(x)=2x^2-x+3$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $u'(x)=4x-1$ إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا $f'=4u'u^3$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=4(4x-1)\left(2x^2-x+3\right)^3$

2. نلاحظ أن $g=\dfrac{1}{u^3}$ مع $u(x)=x^2-1$ كما أن $u(x)\neq 0$ من أجل x من $]1;+\infty[$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا $u'(x)=2x$. إذن g قابلة للاشتقاق على $]1;+\infty[$ و لدينا $g'=-\dfrac{3u'}{u^4}$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)=-\dfrac{3(2x)}{\left(x^2-1\right)^4}=-\dfrac{6x}{\left(x^2-1\right)^4}$

3. نلاحظ أن $h=\sqrt{u}$ مع $u(x)=x^2-4$. الدالة u قابلة للاشتقاق على $]2;+\infty[$ مع $u(x)>0$. إذن h قابلة للاشتقاق على $]2;+\infty[$ و لدينا $h'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ ومنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $h'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

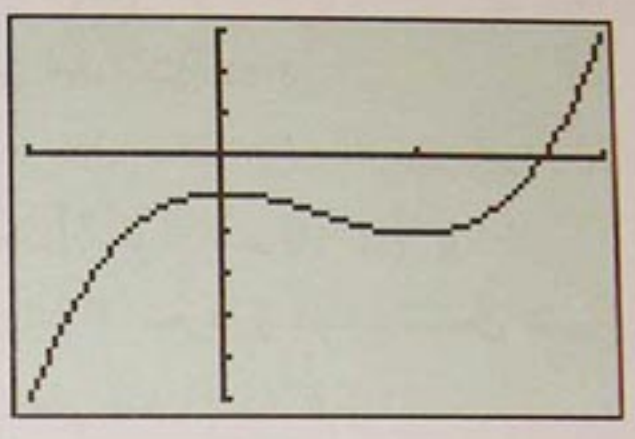
موقع عيون البصائر التعليمي

استعمال دالة مساعدة

أ- نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ $g(x)=2x^3-3x^2-1$

و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم.

1. مثل (C_g) على شاشة حاسبة بيانية ثم ضع تخمينا حول عدد جذورها و حول إشارتها.



WINDOW
Xmin=-1
Xmax=2
Xscl=1
Ymin=-6
Ymax=3
Yscl=1
Xres=1

2. أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين 1,6 و 1,7.
4. استنتج، حسب قيم x، إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

ب- نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ (الوحدة: $4cm$).

1. بين أن $\lim\limits_{x\to -1^{>}} f(x)=+\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. أعط تفسيرا بيانيا للنتيجتين.
2. بين أنه من كل x من $]-1;+\infty[$، $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x^3+1)^2}$
3. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. عين معادلة لـ (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة0.
5. تحقق أنه من أجل كل x من $]-1;+1[$، $f(x)-(-x+1)=\dfrac{x^3(x-1)}{x^3+1}$.
6. بعد دراسة إشارة $f(x)-(-x+1)$ استنتج وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (Δ). ماذا تلاحظ ؟
7. ارسم المستقيم (Δ) و المنحني (C_f).

تعريف: المنحني (C_f) يقع فوق مماسه (Δ) عند النقطة $(0;1)$ من أجل x من $]-1;0[$ و يقع تحت هذا المماس من أجل x من $]0;1[$. تسمى النقطة $(0;1)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f)

elbassair.net

دراسة دالة ناطقة

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-1}{x^2-1}$ و $D_f=]-\infty;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.استنتج المستقيمات المقاربة الموازية لمحور التراتيب.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.أكتب معادلة للمماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .
3. بين أنه من أجل كل x من D_f، $f(x)=x+1+\dfrac{x}{x^2-1}$
4. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيما مقاربا مائلا للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
5. أدرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب المائل (Δ).
6. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1;1[$ يطلب إيجاد، باستعمال حاسبة بيانية، حصر له سعته 0,1 .
7. أرسم المستقيمات المقاربة و المنحنى (C_f).
8. من ملاحظة (C_f) خمن وجود مركز تناظر للمنحنى (C_f) ثم أثبت صحة أو عدم صحة تخمينك.

مربع، مكعب، مقلوب و الجذر التربيعي لدالة

جدول التغيرات الموالي هو لدالة u معرفة على $D_u=[-2;3]$

x	-2		-1		0		1		2		3
$u'(x)$		$+$	0	$-$			0	$+$			
$u(x)$	2	↗	3	↘	0		-1	↗	0	↗	2

1. عين، باستعمال جدول تغيرات الدالة f ،إشارة $u(x)$.
2. نعتبر الدوال f، g، h و k المعرفة كما يلي:

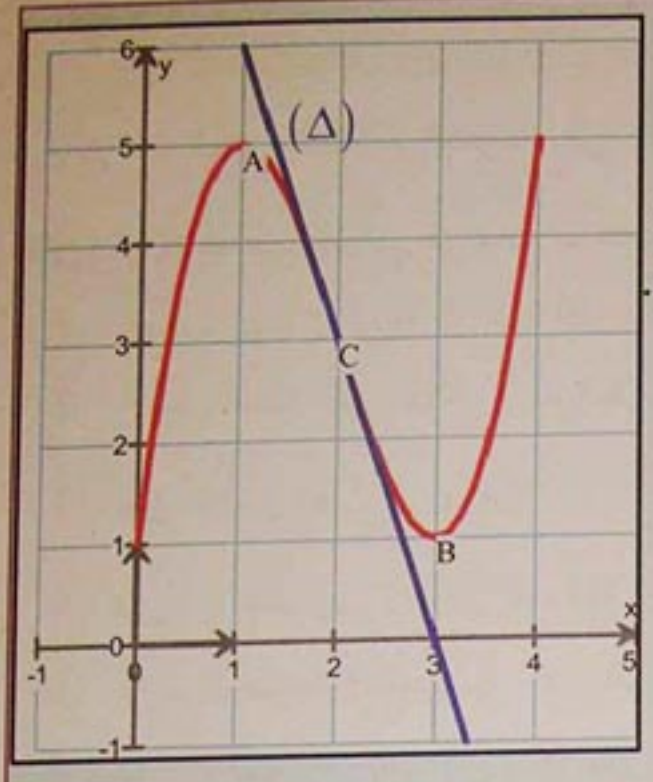
$$f=u^2 \quad ، \quad g=u^3 \quad ، \quad h=\frac{1}{u} \quad ، \quad k=\sqrt{u}$$

- عين مجموعة تعريف كل دالة من الدوال f، g، h و k.
- عبر عن كل من $f'(x)$، $g'(x)$، $h'(x)$ و $k'(x)$ بدلالة $u'(x)$ و $u(x)$.
- استنتج جدول تغيرات كل دالة من الدوال f، g، h و k.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

موضوع محلول



التمثيل البياني (C_f) المقابل و المرسوم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ هو لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $[0;4]$.

النقط A، B و C هي نقط من (C_f) بحيث أن مماسي (C_f) عند كل من A و B يوازيان محور الفواصل بينما مماس (C_f) عند النقط C هو (Δ).

لدينا: $A(1;5)$، $B(3;1)$ و $C(2;3)$.

1. أحسب $f'(1)$، $f'(2)$ و $f'(3)$. أكتب معادلة للمماس (Δ).
2. عين بيانيا عدد حلول المعادلة $f(x)=4$ على المجال $[0;4]$.
3. شكل جدول تغيرات الدالة f ثم استنتج جدول تغيرات الدالة g المعرفة على المجال $[0;4]$ بـ $g(x)=\dfrac{5}{f(x)}$

حل مختصر

1) الأعداد $f'(1)$، $f'(2)$ و $f'(3)$ هي معاملات التوجيه لمماسات (C_f) عند النقط A، C و B على الترتيب.

بما أن مماسي (C_f) عند A و B موازيان لمحور الفواصل فإن $f'(1)=0$ و $f'(3)=0$.

نلاحظ من الشكل مثلا أن $(\Delta)=(CD)$ حيث $D(3;0)$ و منه:

$$f'(2)=\frac{0-3}{3-2}=-3.$$

معادلة (Δ) هي: $y=f'(2)(x-2)+f(2)$. نجد بعد الحساب

$$(\Delta): y=-3x+9$$

2) للمعادلة $f(x)=4$ ثلاث حلول هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=4$.

3)

x	0		1		3		4
$f(x)$	1	↗	5	↘	1	↗	5

لدينا $g'(x)=-5\times\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ و منه اتجاها تغيرات الدالتين f و g متعاكسين. $g(0)=5\times\dfrac{1}{f(0)}=5$، ...

x	0		1		3		4
$g(x)$	5	↘	1	↗	5	↘	1

تعاليق

- لا تكتفي بتقديم النتائج $f'(1)=0$، $f'(3)=0$ و $f'(2)=-3$ بل يجب الشرح كيف تم التوصل إليها.

- حلول المعادلة $f(x)=k$ هي فواصل نقط تقاطع المنحني الممثل للدالة f مع المستقيم ذو المعادلة $y=k$.

- يمكنك كذلك ملاحظة أن الدالة g هي مركب مثلا الدالتين: $x\mapsto f(x)$ و $x\mapsto\dfrac{5}{x}$.

elbassair.net

موضوع مع إرشادات

الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2x^3+x^2-1$

1. أدرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيين حصر له سعته 0,1 .
3. حدد، حسب قيم x، إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^3+x^2+1}{3x}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث وحدة الأطوال هي $3cm$.

1. أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2. بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$، إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)$.
3. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
4. بين أن $f(\alpha)=\dfrac{\alpha}{6}+\dfrac{1}{2\alpha}$ ثم استنتج ، باستعمال حصر العدد α، حصرا للعدد $f(\alpha)$.
5. أرسم المنحنى (C_f) (نأخذ $\alpha\approx\dfrac{2}{3}$).

إرشادات

الجزء الأول:

1. لابد من التمييز بين اتجاه تغير دالة و تغيراتها بحيث أنه عند دراسة تغيرات دالة، إضافة إلى دراسة اتجاه التغير، نقوم بدراسة النهايات عند أطراف مجموعة التعريف ثم تشكيل جدول التغيرات.
2. لتبرير و جود الحل نطبق مبرهنة القيم المتوسط بعد التحقق من توفر شروطها أما إثبات الوحدانية فيتم باستعمال رتابة الدالة على مجال.

لتعيين الحصر فكر في استعمال حاسبة بيانية.

3. فكر في تحديد وضعية α في جدول التغيرات.

الجزء الثاني:

1. لا تنسى استعمال النتيجة المتعلقة بنهاية دالة ناطقة عند $-\infty$ و عند $+\infty$.
2. نبدأ أولا بحساب $f'(x)$.
3. استعمل النتيجة المحصل عليها في السؤال السابق.
4. لا تنسى أن العدد α هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x)=0$.

فكر في استعمال قواعد الحصر التي درستها في السنة الأولى.

5. أحسب $f(\alpha)$ من أجل $\alpha\approx\dfrac{2}{3}$ ثم حدد وضعية النقطة $(\alpha;f(\alpha))$ في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

تمارين

تمارين تطبيقية

1 - الاشتقاقية

1 f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2$

1) من أجل $h\neq 0$ احسب $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

2) هل الدالة f تقبل الاشتقاق عند 2؟ إذا كان الجواب نعم عين العدد المشتق للدالة عند2 .

3) من أجل $h\neq 0$ احسب $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

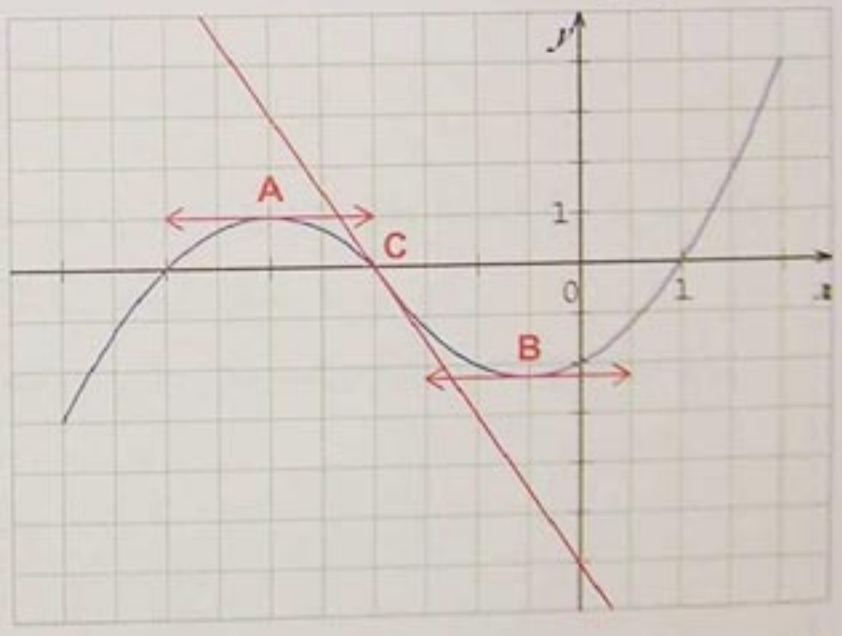
• استنتج $f'(x)$.

2 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=-2x^2+x-1$ و ليكن (C_f) تمثيلها البياني.

1. مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحني (C_f) و (Δ) مماس (C_f) عند النقطة A ذات الفاصلة (-2).

2.عين معادلة لـ (Δ).

3 المنحني البياني التالي هو لدالة f قابلة للاشتقاق على مجموعة تعريفها



1. عين مجموعة تعريف الدالة f .

2. شكل جدول تغيرات الدالة f .

3.عين بقراءة بيانية العدد المشتق للدالة f عند كل من $-\dfrac{1}{2}$ ، -3 و -2 علما أن ترتيب النقطة B هو $-\dfrac{9}{4}$.

4.استنتج معادلات المماسات للمنحني (C_f) عند A ، B و C.

5.هل توجد مماسات أخرى موازية للمماس عند النقطة C؟

4 f دالة عددية متزايدة تماما على $[-5;4]$، منحنيها البياني يشمل النقط $A(-5;-4)$ ، $B(-1;-2)$ و $C(4;3)$.

معامل توجيه المماس لـ C عند B 0 و $f(3)=0$.

ارسم تمثيلا بيانيا ممكنا للمنحني C في معلم متعامد .

5 عين الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية المعرفة على $\mathbb{R}$:

1) $f(t)=0.5t^2+15t$

2) $g(x)=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{4}x-5$

3) $h(x)=-3x^3-6x^2+4x-1$

6 عين الدالة المشتقة لكل من الدوال التالية:

1) من أجل $q\in$:

$$C(q)=0.1q^3-0.5q^2+20q+300$$

2) من أجل $q\in\mathbb{R}^*$: $B(q)=q^2+2q-\dfrac{20}{q}$

3) من أجل $x\in[0;+\infty[$: $f(x)=1-2x+\sqrt{x}$

7 f دالة معرفة على $[0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=x^2+3x+\sqrt{x}$$

1) اكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=u(x)+v(x)$

2) بتطبيق عملية مشتق مجموع دالتين احسب $f'(x)$

3) استنتج إشارة $f'(x)$.

8 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=(1-x)(x^2+x-2)$$

1) اكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=u(x)\times v(x)$

• عين $u(x)$ ، $v(x)$ ، $u'(x)$ و $v'(x)$

2) بتطبيق عملية مشتق جداء دالتين احسب $f'(x)$

3)تحقق من أنه من أجل كل عدد حقيقي x: $f'(x)=-3x^2+3$

4) استنتج إشارة $f'(x)$.

9 f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$$

1) اكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\dfrac{1}{v(x)}$

elbassair.net

2) بتطبيق عملية مشتق $\frac{1}{v}$ احسب $f'(x)$.

3)عين إشارة $f(x)$.

10 f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{-2x+3}{1-x}$$

1) اكتب $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$

2) بتطبيق عملية مشتق $\frac{u}{v}$ احسب $f'(x)$

3)عين إشارة $f(x)$

• في التمارين من **11** إلى **14** ،احسب $f'(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f باستعمال العمليات على المشتقات.

11
1) $f(x)=2x^2-5x+3$

2) $f(x)=\frac{-3x^3+2x+1}{3}$

3) $2f(x)=\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{x}$

4) $f(x)=x^2--\frac{1}{-}+\sqrt{x}$

12
1) $f(x)=(x-1)(x^2+2)-x$

2) $f(x)=(5x^2-3x+1)(x^3-1)$

3) $f(x)=\frac{x^4}{2}(1-x^2)$

4) $f(x)=\frac{1}{x-1}(1+\sqrt{x})$

13
1) $f(x)=\frac{x-1}{2x}$

2) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x-2}$

3) $f(x)=\frac{-3x^2+x-2}{x^2+1}$

4) $f(x)=-2x+1-\frac{1}{1-x}$

14
1) $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{1}{1-x}-\sqrt{x}$

2) $f(x)=(3-\sqrt{x})(-\frac{3}{x})$

3) $f(x)=\frac{1-x^2}{\sqrt{x}}$

4) $f(x)=x-1-\sqrt{x}(\frac{1}{1-x})$

• في التمارين من **15** إلى **17** ، بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق على المجال I و احسب دالتها المشتقة

15
1. $f(x)=x^3-20x^2+150x$ ، $I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=\frac{2x}{x^2-4}$ ، $I=]2;+\infty[$
3. $f(x)=-2x^2(3x-4)$ ، $I=\mathbb{R}$
4. $f(x)=2x+7-\frac{1}{2x+6}$ ، $I=]-\infty;-3[$

16
1. $f(x)=75-50x+0.4x^2$ ، $I=\mathbb{R}$
2. $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$ ، $I=]-1;+\infty[$
3. $f(x)=\frac{10x}{x^2+50}$ ، $I=\mathbb{R}$
4. $f(q)=100+\frac{1}{q}-\frac{1}{q+1}$ ، $I=]0;+\infty[$

17
1. $f(x)=\frac{2x-1}{5-x}$ ، $I=]5;+\infty[$
2. $f(x)=\frac{2x^2+3x-5}{x-1}$ ، $I=]1;+\infty[$
3. $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$
4. $f(x)=\frac{x^3}{x^2+4x+5}$ ، $I=\mathbb{R}$

المماس

• في التمارين **18** من إلى **20** ، اكتب معادلة للمنحني الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها a

18 $f(x)=-3x^3+x-4$ ، $a=0$

19 $f(x)=\frac{4x-3}{x+1}$ ، $a=-2$

20 $f(x)=\frac{1}{2}x+2-\frac{1}{x-1}$ ، $a=3$

21 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

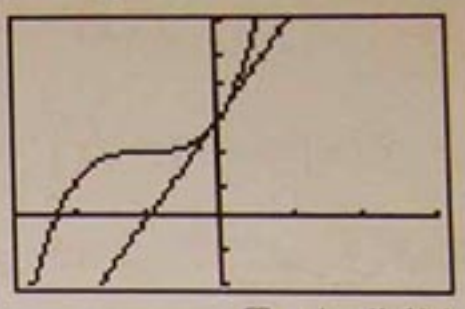
$$f(x)=x^3+3x^2+3x+3$$

على شاشة الحاسبة البيانية نرسم المنحني (C) الممثل للدالة

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

f و المماس T عند النقطة A التي فاصلتها 0



1. عين معادلة للمماس T.

2. خمن على الشاشة وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمماس T.

3. تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f(x)-(3x+3)=x^2(x+3)$$

4. ادرس إشارة $f(x)-(3x+3)$ ثم استنتج وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمماس T .

22 لتكن الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـــ:

$$f(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$$

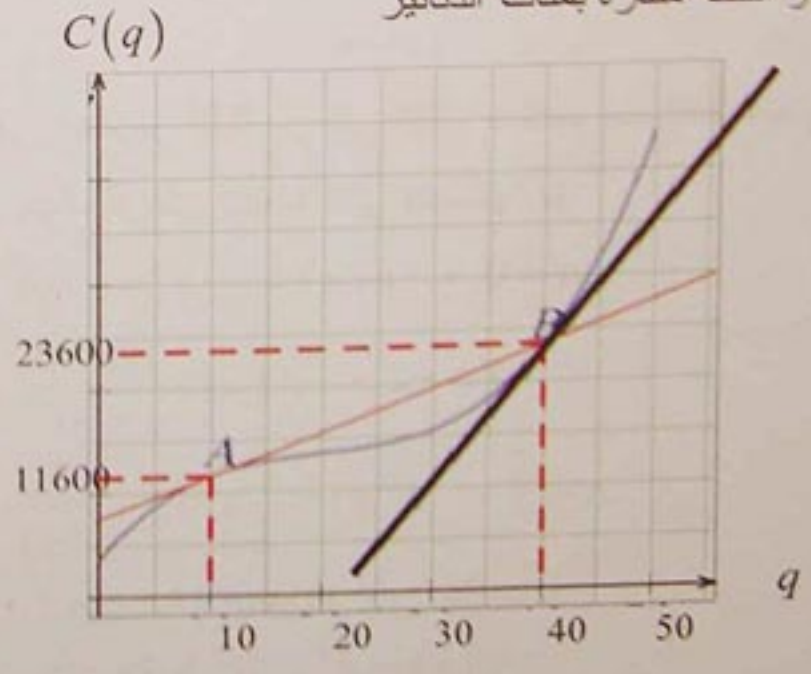
1. عين f' مشتقة الدالة f .

2. ليكن T و T' المماسان للمنحنى (C) الممثل للدالة f عند النقطتين A و B اللتين فاصلتهما 0 و 5 على الترتيب

عين معادلة لكل من T و T'.

3. عين نقطة تقاطع T و T'.

23 المنحنى البياني التالي هو لدالة الكلفة الإجمالية C لمصنع ينتج مواد أولية للبناء، المستقيمان T و T' مماسان للمنحنى في النقطتين A و B على الترتيب. الوحدات المنتجة q مقدرة بآلاف الأطنان حيث $q\in[0;50]$ و الكلفة مقدرة بمئات الدنانير



1.أ) بقراءة بيانية عين $C'(40)$

ب) كلفة إنتاج 40 ألف طن من المنتوج q.

الدالة C الممثلة بيانيا أعلاه معرفة على $[0;50]$ بـــ :

$$C(q)=q^3-60q^2+1300q+3600$$

أ) عين دالة الكلفة الهامشية C_m .

ب) تحقق بالحساب من نتائج السؤال 1 .

25 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$f(x)=2x^3+5x^2+6x+9$$

المنحنى (C) الممثل للدالة f .

1. عين f' مشتقة الدالة f .

2. هل توجد مماسات للمنحنى (C) موازية للمستقيم الذي معادلته $y=6x$ ؟ عين معادلات لها في حالة الوجود.

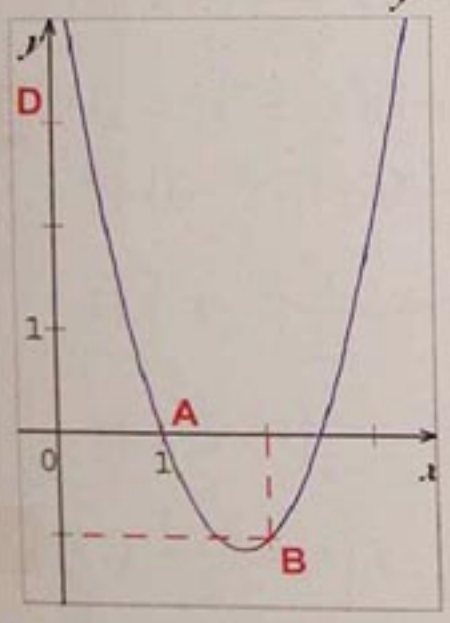
25 نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$f(x)=ax^3+bx+c$$

حيث a، b، c أعداد حقيقية. (C) هو المنحنى الممثل للدالة f في معلم.

عين الأعداد a ، b و c بحيث المنحنى (C) يشمل النقطة $A(1;-3)$ و يقبل في النقطة $B(0;1)$ مماسا موازيا للمستقيم D الذي معادلته $y=-6x$

26 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.



نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ $f(x)=ax^2+bx+c$ حيث a ، b و c أعداد حقيقية، و Γ تمثيلها البياني في الشكل المقابل.

A و B نقطتان من Γ ، المماس للمنحنى Γ عند A يشمل النقطة $D(0;3)$

1. بقراءة بيانية احسب كلا من

$f(1)$ ، $f(2)$ و $f'(1)$

2. باستعمال النتائج السابقة عين a ، b و c .

elbassair.net

27 نعتبر الدالة المعرفة على $\mathbb{R}-\{1;1\}$ بـــ:

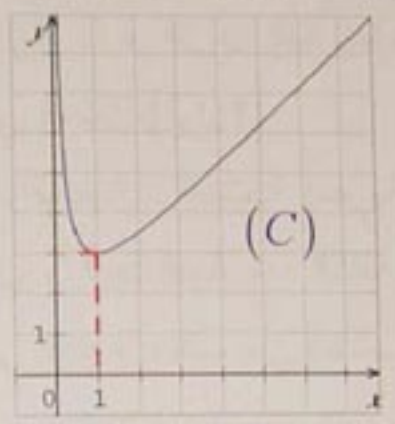
$$f(x)=x+1+\frac{ax}{x^2-1}$$

حيث a عدد حقيقي موجب تماما ، (C) هو المنحنى الممثل للدالة f في معلم.

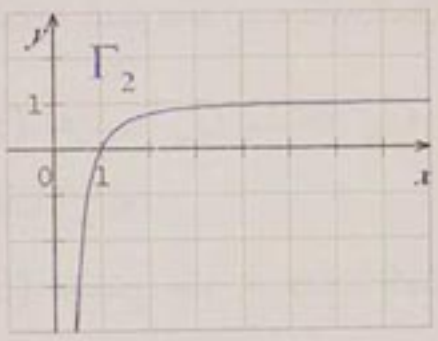
عين a حتى يكون المماس للمنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 0 موازيا لحامل محور الفواصل.

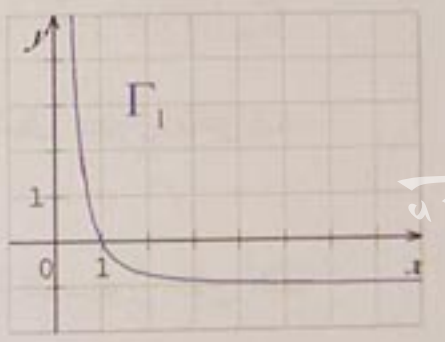
2 ـ دراسة دالة

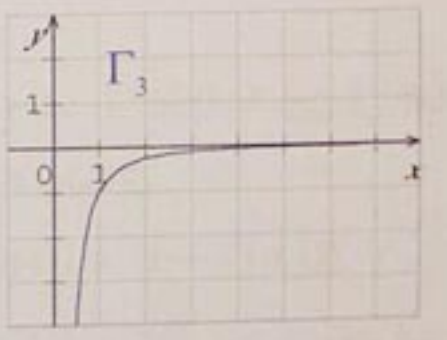
28 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ حيث (C) هو تمثيلها البياني التالي:



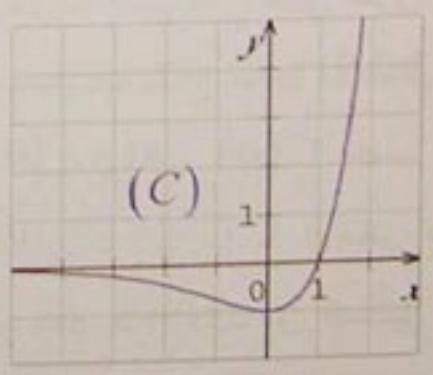
أحد المنحنيات التالية هو المنحنى Γ الممثل للدالة f' ، ما هو؟



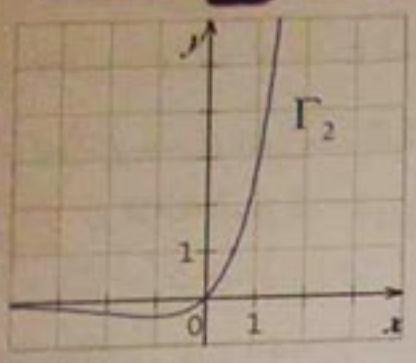


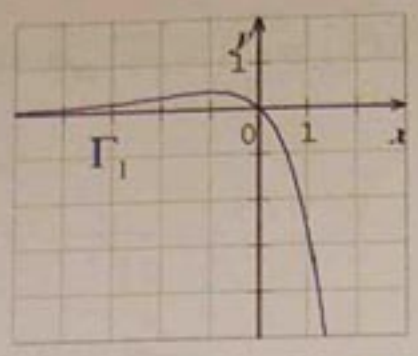


29 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ حيث (C) هو تمثيلها البياني التالي:



أحد المنحنيين التاليين هو المنحنى Γ الممثل للدالة f' ، ما هو؟ برّر.





30 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x^2$

ادرس تغيرات الدالتين التاليتين المعرفتين على $\mathbb{R}$ (بدون دراسة إشارة المشتقة f')

$f_1: x\mapsto x^2+1$ ، $f_2: x\mapsto (x-1)^2$

31 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ: $f(x)=\frac{1}{x}$

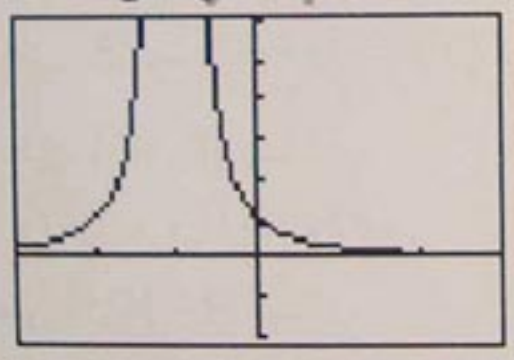
ادرس تغيرات الدالتين التاليتين المعرفتين على $\mathbb{R}^*$ (بدون دراسة إشارة المشتقة f')

$f_1: x\mapsto \frac{-2}{x}$ ، $f_2: x\mapsto \frac{3}{x}$

32 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ :

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$$

(C) هو تمثيلها البياني التالي على شاشة آلة حاسبة بيانية



1. شكل جدول تغيرات الدالة f .

2. استنتج تغيرا ت الدالتين التاليتين (مع الشرح)

$f_1: x\mapsto \frac{-2}{(x+1)^2}$ ، $f_1: x\mapsto 2-\frac{1}{(x+1)^2}$

33 1. ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـــ :

$f(x)=\sqrt{x}-2$ (استعمل الدالة $x\mapsto\sqrt{x}$)

2. ارسم المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O;I,J)$

34 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ:

$$f(x)=1-x+\frac{1}{x}$$

1. شكل جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$g(x)=1-x$$

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

و جدول تغيرات الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ : $h(x)=\frac{1}{x}$

2.استنتج جدول تغيرات الدالة f .

35 f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ

$$f(x)=-x^3-2x+1$$

بملاحظة أن هي مجموع دالتين رتيبتين تماما على $\mathbb{R}$ ،استنتج تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

• في التمارين من **36** إلى **45** ، ادرس اتجاه تغير الدالة f بعد حساب دالتها المشتقة f' و دراسة إشارتها.

36 f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=x^2-4x-5$

37 f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+4$

38 f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=x^4-3x^2+2$

39 f معرفة على $\mathbb{R}-\{-2\}$ بـــ : $f(x)=\frac{2x+1}{x+2}$

40 f معرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـــ :

$$f(x)=x-1+\frac{3}{x-2}$$

41 f معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;2\}$ بـــ :

$$f(x)=\frac{5x^2+14x}{x^2-x-2}$$

42 f معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=\frac{x+1}{x^2+3}$

43 f معرفة على $[0;+\infty[$ بـــ :

$$f(x)=(2x-3)\sqrt{x}$$

44 f معرفة على $\mathbb{R}-\{0;1\}$ بـــ:

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1}$$

45 f معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ بـــ :

$$f(x)=\frac{x^2\left(x^2-2x+9\right)}{(x-1)^2}$$

46 الكلفة الإجمالية C لإنتاج q وحدة من منتوج معين مقدرة بمئات آلاف الدنانير معطاة بالعلاقة :

$$C(q)=q^3-90q^2+10000q+7500$$

حيث $0\le q\le 80$.

كل وحدة إنتاجية تباع بـــ $10000DA$

1. عين دالة الكلفة الهامشية و شكل جدول تغيراتها.

2.حل المعادلة $C'(q)=10000$ على المجال $[0;80]$

• استنتج إشارة $10000-C'(q)$

3.الربح المحقق من أجل إنتاج q وحدة معطى بالعلاقة:

$$B(q)=10000q-C(q)$$

• استنتج من أجل أي عدد للوحدات المنتجة يكون الربح أعظميا و احسب هذا الربح.

47 مؤسسة تصنع منتجا q (q مقدر بالآلاف)، الكلفة الإجمالية لصنع q وحدة من هذا المنتج معطاة بالدالة :

$$C(q)=0,75q^3-7,5q^2-11q+400$$

حيث $q\in[1;12]$ و $C(q)$ مقدر بمئات الدنانير

1) احسب $C'(q)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جدول تغيرات الدالة C على المجال $[1;12]$.

2) عين عدد الوحدات المنتجة (مقربة إلى 0,1) الذي يعطي كلفة صغرى، و أعط قيمة هذه الكلفة.

48 حرفي ينتج وحدات من الخشب، كل أسبوع يقدر أن كلفة الإنتاج بـــ DA لـــ x وحدة معطاة بالعلاقة:

$C(x)=x^2+60x+121$ من أجل $x\in[1;30]$.

الكلفة المتوسطة معطاة بالعلاقة $C_m(x)=\frac{C(x)}{x}$

1) احسب C_m' مشتقة C_m و شكل جدول تغيرات الدالة C_m .

2) استنتج عدد الوحدات المنتجة للحصول على كلفة متوسطة صغرى.

3) كل وحدة تباع بـــ $1100DA$.بين أن الفائدة المحققة من بيع x وحدة معطاة بالعلاقة:

$$B(x)=-x^2+1040x-121$$

ادرس إشارة $B'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة B .

استنتج عدد الوحدات التي تباع حتى تكون الفائدة قصوى.

49 مؤسسة صناعية تنتج ألعابا للأطفال ، كلفة إنتاج q وحدة ($q\in[0;100]$) هي $C(q)$ حيث $C(q)=0,05q^2+q+80$ ، q مقدر بالآلاف و $C(q)$ مقدر بعشرة الآلاف من الدنانير

1) عين الكلفة الثابتة.ادرس تغيرات C .

حل المعادلة $C(q)=480$ ثم أعط تفسيرا.

elbassair.net

2) بيع q آلاف من اللعب يعطي دخلا R الذي هو دالة تآلفية حيث $R(50)=300$ و $R(60)=360$ (مقدرا بعشرة الآلاف من الدنانير)

• عين عبارة $R(q)$.

3) بين أن الفائدة المحصل عليها B من طرف المؤسسة معرفة بالعلاقة $B(q)=-0,05q^2+5q-80$

ما هو عدد الوحدات التي يجب على المؤسسة إنتاجها حتى تكون الفائدة موجبة؟

4) ادرس تغيرات الدالة B .ما هو عدد الوحدات المنتجة حتى تكون الفائدة قصوى؟ما هي قيمة هذه الفائدة؟

5) في معلم متعامد ($1cm$ من أجل 20 وحدة على محور الفواصل و $1cm$ من أجل 50 وحدة على محور التراتيب) ، ارسم التمثيلات البيانية للدوال C، R و B .

3 - اشتقاق دالة مركب دالتين

50 f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x)=x^2$ و $g(x)=2x-1$

1. شكل جدولي تغيرات كل من f و g .

2. h هي الدالة المعرفة بـ $h=f\circ g$ أي هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=(2x-1)^2$.

أ- بين لماذا الدالة h متزايد تماما على $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ ؟

ب-ادرس تغيرات الدالة h على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right]$

ج-شكل جدول تغيرات الدالة h .

51 نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}^+$ بـ:

$f(x)=3x+5$ و $g(x)=\sqrt{x}$.

1) أعط تغيرات الدالتين f و g .

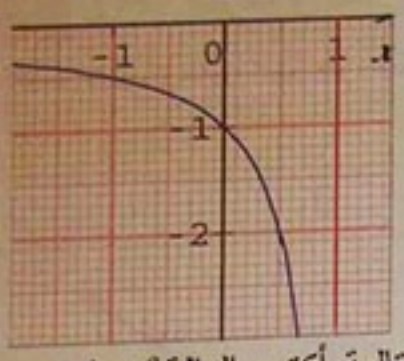
2) نعتبر الدالة h مركب الدالة f متبوعة بـ g .

عين عبارة $h(x)$ ثم ادرس تغيرات الدالة h .

3) نضع $u=f\circ g$. أعط عبارة $u(x)$ و ادرس تغيرات الدالة u .

52 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x^2-3$

و g هي الدالة المعرفة على $]-\infty;1]$ و الممثلة بمنحنييها البياني في الشكل المقابل:



لتكن الدالة h حيث $h=g\circ f$

1) بين أن الدالة h معرفة على $]-2;2[$.

2) عين اتجاه تغير الدالة h .

53 في كل حالة من الحالات التالية أكتب الدالة f على شكل مركب دالتين ($f=g(u)$) و ادرس اتجاه تغيراتها

1) f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(1-x)^2$

2) f معرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـ $f(x)=\frac{1}{3-x}$

3) f معرفة على $]-\infty;2]$ بـ $f(x)=\sqrt{4-2x}$

54 f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$

عين f' مشتقة الدالة f

55 f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\left(3x^2+1\right)^3$

عين مشتقة الدالة f

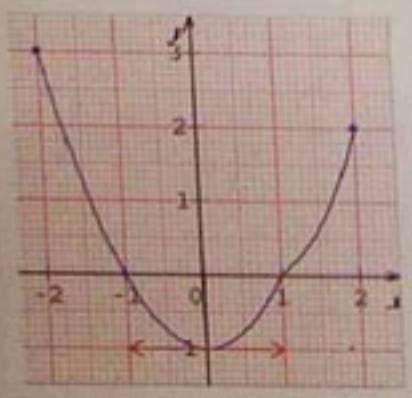
56 1. برهن أنه إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث من أجل كل x من I ، $u(x)\neq 0$ فإن الدالة $\frac{1}{u^n}$ (n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 1) قابلة للاشتقاق على I و $\left(\frac{1}{u^n}\right)'=-\frac{nu}{u^{n+1}}$

مساعدة: الدالة $\frac{1}{u^n}$ هي مركب الدالة $g:u\mapsto u^n$ متبوعة بالدالة $f:u\mapsto\frac{1}{u}$

2. **تطبيق:** h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{1}{\left(3x^2+1\right)^3}$

عين مشتقة الدالة f (لاحظ أن $f=\frac{1}{u^n}$)

57 المنحنى البياني التالي هو لدالة u معرفة و قابلة للاشتقاق على $[-2;2]$.



1. اقرأ بيانيا إشارة $u(x)$ ثم إشارة $u'(x)$

2. لتكن الدالة f حيث $f=u^2$

• عبر عن f' بدلالة u و u'

• استنتج إشارة f' و جدول تغيرات f.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

تمارين

58 f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[-2;3]$ حيث جدول تغيراتها هو التالي:

x	-2		-1		0		1		2		3
$f'(x)$	$+$		0	$-$	‖	$-$	0		‖	$+$	
$f(x)$	1	↗	2	↘	0			↘	-2	↗	3

في كل حالة عين مجموعة تعريف الدالة g ،عبر عن $g'(x)$ بدلالة $f(x)$ و $f'(x)$ ثم استنتج جدول تغيرات الدالة g.

1) $g=\sqrt{f}$ 2) $g=f^2$ 3) $g=\frac{1}{f}$

59 f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(x^2-1)^3$

ادرس تغيرات f :

أ- بدون حساب مشتقة f .

ب- بحساب مشتقة f .

60 f هي الدالة قابلة للاشتقاق على $[-2;3]$ حيث جدول تغيراتها هو التالي

x	-2		0		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-3	↗	1	↘	2

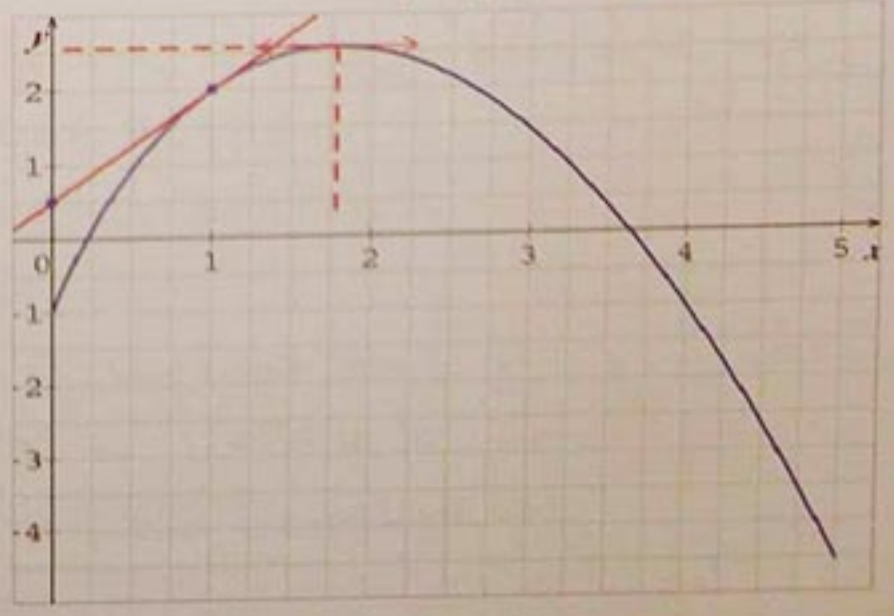
نضع $g=f(\sqrt{x})$

1. بين أن مجموعة تعريف الدالة g هي $[0;9]$

2. ادرس بطريقتين مختلفتين اتجاه تغير الدالة g على $[0;9]$.

تمارين للتعمق

61 الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0;5[$



لمستقيمان المرسومان في الشكل هما المماسان للمنحني عند النقطتين اللتين فاصلتاهما1 و $\frac{16}{9}$.

1.بقراءة بيانية عين $f(1)$ و $f'(1)$.

2.حل بيانيا في المجال $[0;5[$ المتراجحات التالية (القيم في المقروءة في التمثيل تعطى بالتقريب إلى 10^{-1})

أ) $f(x)\geq 0$ ، ب) $f'(x)\geq 0$ ، ج) $f(x)\leq 1$

3. نقبل أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;5[$:

$$f(x)=a+bx\left(2-\sqrt{x}\right)$$

عددان حقيقيان نريد حسابهما.

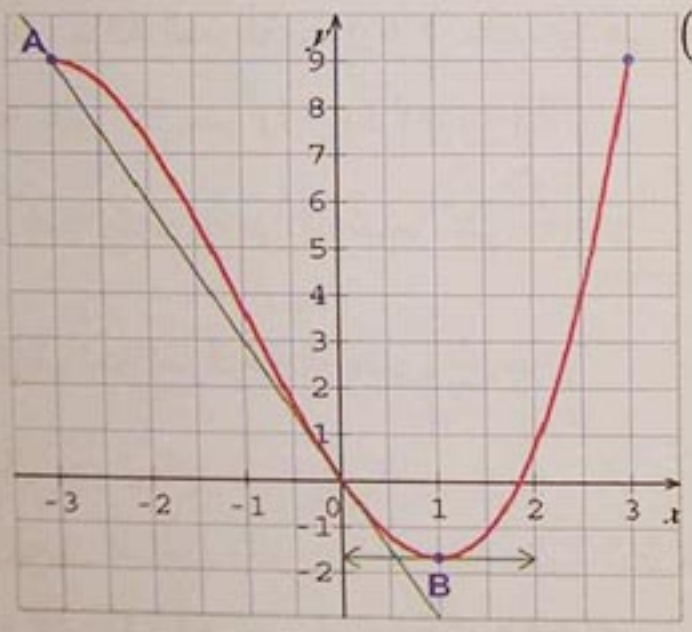
أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;5[$:

$$f'(x)=b\left(2-\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)$$

ب- باستعمال قيم $f(1)$ و $f'(1)$ المحصل عليها في السؤال1 عين a و b .

62 بكالوريا

الشكل الموالي هو التمثيل البياني C_f لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[-3;3]$ في معلم متعامد $(O;I,J)$



المنحني C_f يحقق الشروط التالية:

يمر بمبدأ المعلم O ، و يشمل النقطة $A(-3;9)$ ، يقبل في النقطة B التي فاصلتها 1 مماسا أفقيا و يقبل المستقيم (OA) كمماس عند النقطة O .

1. ما هو معامل توجيه المستقيم (OA) ؟

2.نفرض أن f معرفة على $[-3;3]$ بـ:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

حيث a ، b ، c و d أعداد حقيقية

elbassair.net

أ- بين باستعمال الشروط السابقة أن:

$$a=\frac{1}{3}\ ،\ b=1\ ،\ c=-3\ و\ d=0$$

ب-حلل $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f .

63 دراسة دالة ناطقة

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{2\}$ بـــ:

$$f(x)=\frac{-x^2+5x-15}{2x-4}$$

C هو التمثيل البياني لها في معلم متعامد ومتجانس $(O;I,J)$

1. بين أن $f'(x)=\frac{2\left(-x^2+4x+5\right)}{(2x-4)^2}$ حيث f' هي مشتقة f

2.أ- ادرس إشارة f'

ب-ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف، استنتج أن المنحني C يقبل مستقيما مقاربا عموديا D .

ج- شكل جدول تغيرات f .

3. ا-عين الأعداد الحقيقية a ، b ، c بحيث من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 2$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{2x-4}$

ب- بين أن المستقيم الذي معادلته $y=-\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$ مقارب للمنحني C .

64 نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ:

$$f(x)=\frac{6}{x}-\frac{9}{2x^2}+\frac{1}{x^3}$$

C هو التمثيل البياني لها في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ الوحدة $3cm$.

1.درس تغيرات f ، شكل جدول التغيرات .

2. أ- حل المعادلة $f(x)=0$ ، استنتج أن للمنحني C لا يقطع محور الفواصل.

ب- حسب جدول التغيرات ناقش حسب قيم اعدد الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x)=m$.

ج- عين معادلة لكل من المماسين T_1 و T_2 للمنحني C عند النقطتين اللتين فاصلتاهما $\frac{1}{2}$ و 1 .

3. أنشئ المماسين T_1 ، T_2 و المنحني C .

65 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـــ:

$$f(x)=\frac{x^3+1}{(1-x)^2}$$

بين أن جدول تغيرات الدالة f هو الجدول التالي:

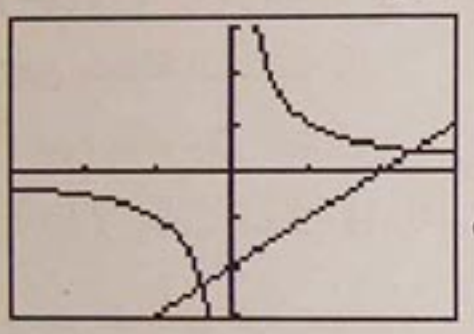
x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

66 f دالة معرفة على $[1;3]$ بـــ:

$$f(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$$

بين أن f تقبل قيمة حدية عظمى عند 1

67 لتكن المعادلة: $(E):\frac{1}{x}=x-2$ حيث المجهول x عدد حقيقي من المجال $]0;+\infty[$



1.تلميذ رسم على شاشة آلته الحاسبة المنحني الذي معادلته $y=\frac{1}{x}$ و المستقيم الذي معادلته $y=x-2$.

• بملاحظة الرسم البياني ، كم تقبل المعادلة (E) من حل على المجال $]0;+\infty[$ ؟

2. تلميذ ثان اعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ

$$g(x)=x-2-\frac{1}{x}$$

أ) عين نهايات الدالة g عند حدود مجموعة التعريف.

ب) احسب $g'(x)$ حيث g' هي الدالة المشتقة لـــ g .بين أن g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ج) استنتج عدد حلول المعادلة (E) و أعط باستعمال الحاسبة حصرا سعته 10^{-2}.

3. تلميذ ثالث قال: " يمكنني حل المعادلة (E) جبريا "

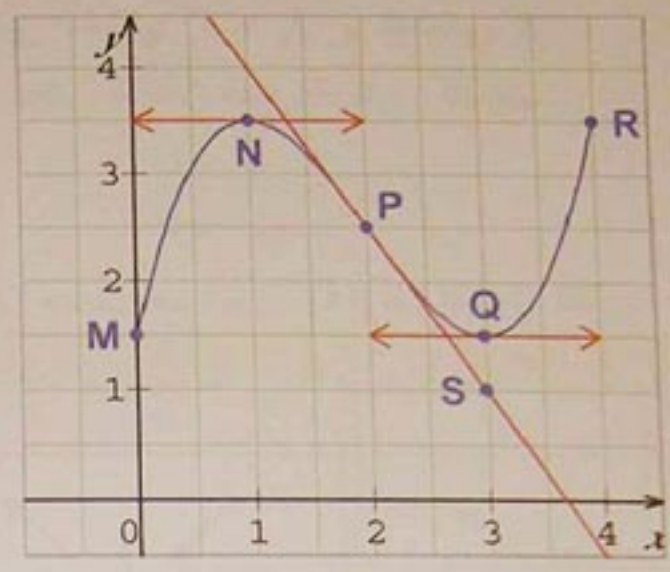
• بين ، بحل المعادلة أن هذا التلميذ على صواب.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

تمارين

68 لتكن f دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0;4]$ و C تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$



النقط M ، N ، P ، Q و R تنتمي إلى C .المنحنيِ C يقبل في كل من النقطتين N و Q مماس موازيا لحامل محور الفواصل.المستقيم Δ هو المماس للمنحني C في النقطة $P\left(2;\frac{5}{2}\right)$. و يشمل النقطة $S(3;1)$.

1.أ) عين $f'(1)$ ، $f'(2)$ و $f'(3)$

ب) عين معادلة للمستقيم Δ .

2. أ) عين باستعمال التمثيل البياني عدد حلول المعادلة $f(x)=3$ على المجال $[0;4]$

ب) ارسم المستقيم الذي معادلته $y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$ ثم حل المتراجحة $f(x)<\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$

3. الدالة f هي مشتقة دالة F معرفة على $[0;4]$.أعط تغيرات الدالة f مبررا الجواب.

4. لتكن الدالةg المعرفة على $[0;4]$ بـ $g(x)=\frac{1}{f(x)}$

أ) أعط جدول تغيرات f .

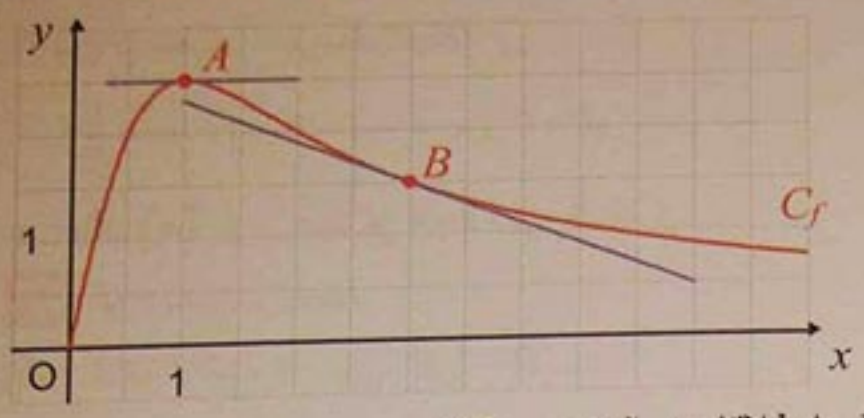
ب) استنتج جدول تغيرات g .

69 الشكل التالي هو التمثيل البياني C_f لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و f' دالتها المشتقة.نعلم أن:

-محور الفواصل مقارب لـ C_f عند $+\infty$.

-المنحني C_f يقبل مماسا موازيا لمحور الفواصل عند النقطة A.

-المماس لـ C_f عند النقطة B يشمل النقطة التي إحداثياتها $\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$.



1. انطلاقا من المنحني C_f :

أ) عين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب) عين $f'(1)$ و $f'(3)$

ج) حل المعادلة $f'(x)\geq 0$

2. تعتبر الدالة g المعرفة بـ : $g(x)=\frac{1}{f(x)}$

أ) حدد مجموعة تعريف الدالة g .

ب) احسب $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ج) احسب $g'(1)$ و $g'(3)$.

د) ادرس تغيرات الدالة g على مجموعة تعريفها.

3. تعتبر الدالة h التي ترفق بكل عدد حقيقي موجب تماما x ، $h(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

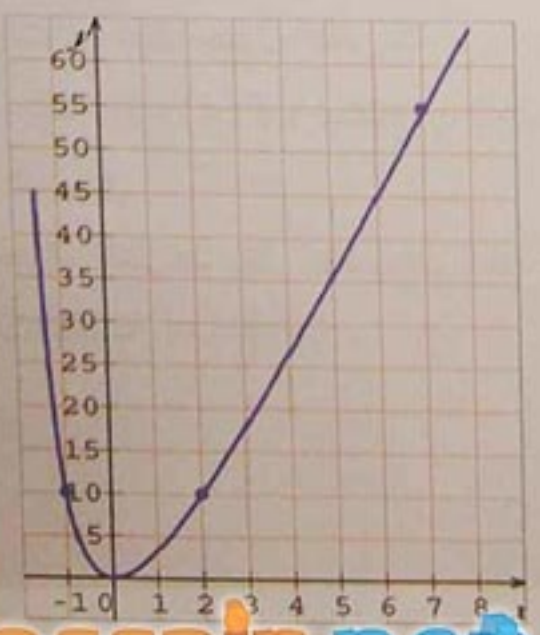
أ) احسب $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني الممثل للدالة h ؟

ب) احسب $h'\left(\frac{1}{3}\right)$

مسائل

70 **الجزء1:**

f دالة معرفة على $]-2;+\infty[$ الشكل المقابل هو تمثيلها البياني على المجال $[-1,5;8]$



elbassair.net

1.أعط جدول تغيرات الدالة f على المجال $[-1,5;8]$ محددا إشارة $f'(x)$ و صورتي $-1,5$ و 8 .

2. حل بيانيا على المجال $[-1,5;8]$ المعادلتين:

أ) $f(x)=10$ ب) $f(x)=55$

الجزء2:

الدالة f السابقة معرفة على $]-2;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{10x^2}{x+2}$

(C) هو التمثيل البياني لـ f في معلم.

1.أ) ادرس نهاية f عند -2 .استنتج مستقيما مقاربا لـ (C).

ب) ادرس نهاية f عند $+\infty$.

ج) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x>-2$:

$$f(x)=10x-20+\frac{40}{x+2}$$

استنتج مستقيما مقاربا مائلا لـ (C).

2. أ) ادرس إشارة $f'(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة f على $]-2;+\infty[$.

الجزء3:

مؤسسة تنتج و تبيع مواد مصنوعة ، الربح (بمئات الدنانير) المحقق من طرف هذه المؤسسة يساوي $f(x)$ حيث x هو كمية الوحدات المباعة($x\in[0;+\infty[$) و f هي الدالة المدروسة في الجزء2 .

أ. بين أن هذا الربح موجب.

2.قررت المؤسسة تحديد الفائدة المناسبة لبيع 100 مادة و المقدرة بـ 6% سنويا.

نرمز بـ C_0 إلى هذا الربح مقدرا بمئات الدنانير ومدورا إلى الوحدة و بـ C_n إلى القيمة خلال n سنة.

أ) تحقق أن $C_0=980$ ثم احسب C_1 و C_2 .

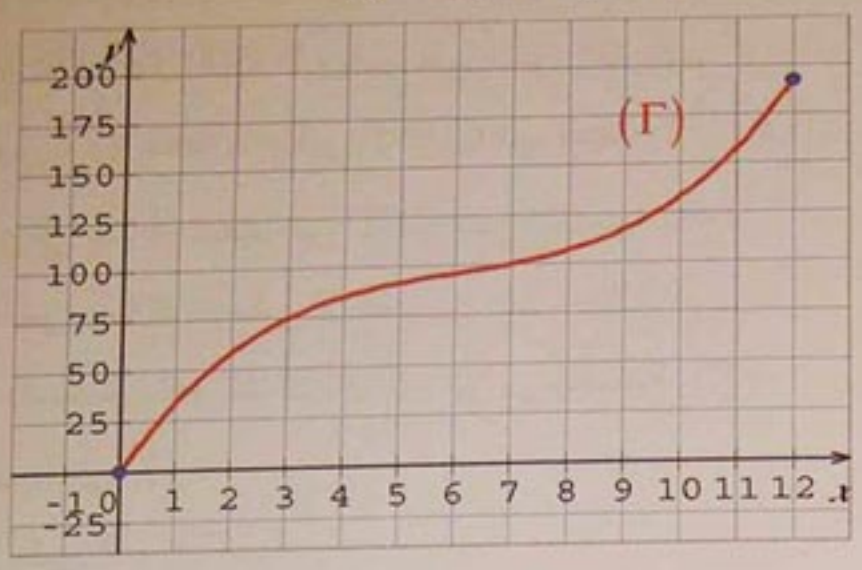
ب) عبر عن C_{n+1} بدلالة C_n .حدد طبيعة المتتالية (C_n).

ج) عين القيمة المكتسبة المحصل عليها خلال 10 سنوات(مدورة إلى الوحدة)

71 الكلفة الإجمالية لصنع كمية q من منتوج معطاة بـ:

$C(q)=\dfrac{1}{3}q^3-6q^2+40q$ من أجل $q\in[0;12]$

حيث q يمثل عدد آلاف الوحدات المصنوعة و $C(q)$ كلفة الصنع مقدرة بـآلاف الدنانير .المنحنى (Γ) الممثل لدالة الكلفة الإجمالية معطى كالآتي:



1) نذكر أن الكلفة المتوسطة للإنتاج $C_M(q)$ معطاة بالعلاقة $C_M(q)=\dfrac{C(q)}{q}$ مع $q\neq 0$

أ) عبر بدلالة q عن الكلفة المتوسطة للإنتاج.

ب) احسب العدد q_0 للوحدات التي تصنع حتى تكون الكلفة المتوسطة للإنتاج صغرى.

2) نسمي الكلفة الهامشية للإنتاج $C_m(q)$ حيث $C_m(q)=C'(q)$ حيث C' هي مشتقة الدالة C

أ) عبر بدلالة q عن الكلفة الهامشية للإنتاج.

ب) تحقق أنه من اجل q_0 الكلفة الهامشية تساوي الكلفة المتوسطة.

3) عين معادلة للمماس T للمنحني (Γ) عند النقطة A التي فاصلتها 9 ثم ارسمه في الشكل.

4) نفرض أن المؤسسة تبيع كل الإنتاج . من أجل $q\in[0;12]$ ، الفائدة بـآلاف الدنانير من أجل الإنتاج و البيع لـ q آلاف وحدة معطاة بالعلاقة:

$$B(q)=-\frac{1}{3}q^3+2q^2+21q$$

أ) احسب عدد الوحدات المنتجة حتى تكون المؤسسة رابحة.

ب) عين عدد الوحدات التي تنتج حتى تكون الفائدة قصوى؟

72 بكالوريا

الجزء1: لتكن الدالة العددية C المعرفة على $[0;300]$ بـ: $C(x)=\dfrac{1}{30}x^3-15x^2+2500x$

1) احسب $C'(x)$ ، C' هي الدالة المشتقة للدالة C

•شكل جدول تغيرات الدالة C' و ادرس إشارتها.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

2) ينسب المستوي إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

(الوحدة: $0,5cm$ لكل10 وحدات على محور الفواصل و $0,5cm$ لكل10000 وحدة على محور التراتيب)

نسمي (Γ) التمثيل البياني للدالة C في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$،

و نرمز بـــ A النقطة من (Γ) التي فاصلتها 150

- عين معادلة المماس T للمنحني عند النقطة A .
- باستعمال تغيرات الدالة C'، ادرس وضعية (Γ) بالنسبة إلى T.

3) أنشئ T و (Γ).

الجزء2: تطبيق في مجال الاقتصاد

في مؤسسة E أين الإنتاج يتغير من 0 إلى 300 وحدة ، الكلفة الإجمالية لصنع x وحدة معطاة بالدالة :

$$C(x)=\frac{1}{30}x^3-15x^2+2500x$$

نسمي الكلفة الهامشية للإنتاج $C_m(x)$ حيث:

$$C_m(x)=C'(x)$$

نفرض أن المؤسسة رائدة في السوق حيث أن العلاقة بين سعر البيع p و الطلب x(بالوحدات)

هي $p(x)=-\frac{45}{8}x+2750$

(أي كل وحدة x تباع بسعر $p(x)$)

1) احسب الدخل الإجمالي $R(x)$ من اجل بيع x وحدة .

2) نسمي دخل هامشي الزيادة في المدخول الناتج عن بيع منتوج إضافي.

ننمذج هذا الدخل بالعلاقة التالية: $r_m(x)=R'(x)$ حيث R' هي الدالة المشتقة للدالة R .

من أجل أية قيمة لـــ x الدخل الهامشي يكون مساويا للكلفة الهامشية؟

3) بين أن الفائدة من أجل الإنتاج و البيع لـــ x وحدة معطاة بـــ: $B(x)=-\frac{1}{30}x^3+\frac{75}{8}x^3+250x$

احسب $B'(x)$ حيث B' هي مشتقة الدالة B .

استنتج أن الفائدة تكون قصوى عندما يكون الدخل الإجمالي مساويا للكلفة الإجمالية.ما قيمة الفائدة القصوى؟

73 الجزء1:

لتكن الدالة g المعرفة على $[0;+\infty[$ بـــ

$$g(x)=5x^3-1500x-200$$

1.ادرس تغيرات الدالة g على $[0;+\infty[$ و شكل جدول تغيراتها.

2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحدا α في المجال $[10;20]$.أعط قيمة مقربة إلى 0,1 لـــ α .

3.استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $[0;+\infty[$.

الجزء2: الكلفة المتوسطة للإنتاج بمئات الدنانير عند إنتاج x وحدة (x مقدر بالمئات)معرفة على $[0;+\infty[$ بـــ

$$C_M(x)=5x+31+\frac{1500x+100}{x^2}$$

(C) هو التمثيل البياني لها في معلم متعامد $(O;I,J)$

1.عين نهاية C_M عند 0 .أعط تفسيرا بيانيا لهذه النهاية.

2.أ) عين نهاية C_M عند $+\infty$.

ب) بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=5x+31$ مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

ج) احسب مشتقة الدالة C_M و بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;+\infty[$ لدينا: $C_M'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$

حيث g هي الدالة المعرفة في الجزء1

4.أ) استعمل الجزء1 لدراسة إشارة $C'_M(x)$.استنتج تغيرات C_M .

ب) شكل جدول تغيرات C_M .

5.عين كمية الوحدات (مدورة إلى 0,1) المنتجة للحصول على كلفة متوسطة صغرى.ما هي هذه الكلفة ؟

6.أنشئ (C) و D .(الوحدة $2cm$ من أجل 5 وحدات على محور الفواصل و $1cm$ من أجل 50 وحدة على محور التراتيب).

elbassair.net

74 **الجزء1:**

لتكن الدالة g المعرفة على $]-5;+\infty[$ بـــ:

$$g(x)=\frac{9}{x+5}-0,05x+4$$

نرمز بـــ C_g إلى تمثيلها البياني

1. ادرس نهاية g عند -5 ثم فسر النتيجة بيانيا.
2. ادرس نهاية g عند $+\infty$. بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=-0,05x+4$ مقارب للمنحنى C_g عند $+\infty$.

ادرس وضعية C_g بالنسبة إلى D.

3. احسب $g'(x)$ و ادرس إشارتها.
4. شكل جدول تغيرات الدالة g على $]-5;+\infty[$.
5. المستوي منسوب إلى معلم متعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\left\|\vec{i}\right\|=0,5cm$ و $\left\|\vec{j}\right\|=2cm$.

- ارسم المستقيمات المقاربة و المنحنى C_g.

الجزء2:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$f(x)=4,5-\frac{6x^3+24x^2+36x+18}{\left(x^2+2x+2\right)^2}$$

نرمز بـــ C_f إلى تمثيلها البياني.

1. ادرس نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$، ثم فسر النتيجة بيانيا.
2. احسب $f'(x)$ ثم تحقق أن:

$$f'(x)=\frac{6x(x+2)^3}{\left(x^2+2x+2\right)^3}$$

3. ادرس إشارة $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة f.
4. أنشئ C_f في نفس المعلم السابق.

الجزء3:

x يمثل ثمن وحدة من منتوج معين(مقدر بمئات الدنانير)،نقبل أن كمية العرض في السوق و كمية الطلب مقدرتان بالآلاف منمذجتان على المجال $[0;20]$

- بالنسبة لدالة العرض بـــ:

$$g(x)=\frac{9}{x+5}-0,05x+4$$

بالنسبة لدالة الطلب بـــ

1. لتكن الدالة h المعرفة على $[0;20]$ بـــ:

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

باستعمال النتائج المحصل عليها في الجزء ين 1 و 2:

أ) ادرس تغيرات الدالة h.

ب) بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا واحدا α

2. استنتج مما سبق ثمن الموازنة و كذا عدد الوحدات المقترحة في السوق لهذا الثمن.

75 نعتبر دالة كثير الحدود p المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$p(x)=x^3+3x^2+3x-5$$

1) أ) ادرس تغيرات p.

ب) بين أن المعادلة $p(x)=0$ تقبل حلا واحدا في α المجال في المجال $[0;1]$.

- أعط حصرا لـــ α سعته 10^{-1}.

ج) عين إشارة $p(x)$ حسب قيم x.

2) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـــ:

$$f(x)=\frac{x^3-3x+1}{(x+1)^2}$$

(C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$. الوحدة $2cm$.

أ) عين نهاية الدالة f عند -1. فسر بيانيا النتيجة.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2. أ) احسب $f'(x)$. بين انه من أجل كل x من $]-1;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{P(x)}{(x+1)^3}$$

ب) شكل جدول تغيرات f

3 أ) بين أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-2$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

ب) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى Δ.

4. عين معادلة للماس T للمنحنى (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 0.

5. أنشئ (C)، T و المستقيمات المقاربة.

elbassair.net

اختبر معلوماتك

اختيار من متعدد

76 الدالة K معرفة و موجبة تماما على $\mathbb{R}^+$ و جدول تغيراتها هو التالي

x	0		1		3		$+\infty$
$K(x)$		↗		↘		↗	$+\infty$

ما هو جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ $g(x)=\dfrac{1}{k(x)}$ ؟

أ)

x	0		1		3		$+\infty$
$g(x)$		↘		↗		↘	0

ب)

x	0		1		3		$+\infty$
$g(x)$		↘		↗		↘	$-\infty$

ج)

x	0		1		3		$+\infty$
$g(x)$		↘		↗		↘	$-\infty$

77 في مؤسسة، دراسة بينت أن الكلفة الهامشية $C_m(q)$ مقدرة بمئات الدنانير بدلالة عدد q من الوحدات المصنوعة معطاة بالعلاقة: $C_m(q)=3q^2-10q+20$

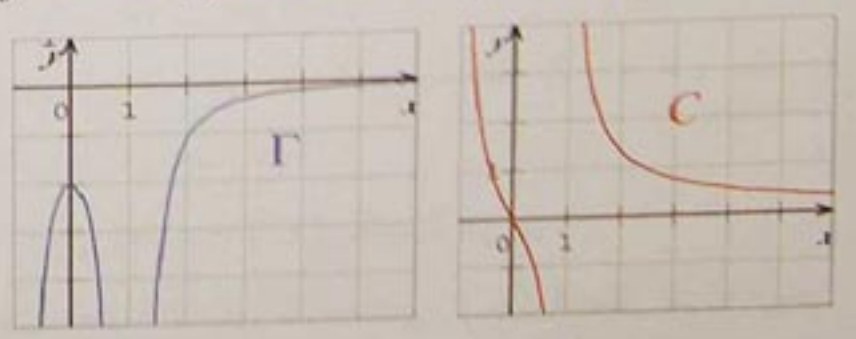
ما هي الكلفة الإجمالية C_T علما أن قيمتها $99300\ DA$ من أجل $q=10$

أ) $C_T(q)=q^3-5q^2+20q+100000$

ب) $C_T(q)=q^3-5q^2+20q+6$

ج) $C_T(q)=6q-10$

78 الشكل المقابل يمثل المنحني C الممثل لدالة f معرفة على $]-1;+\infty[$ و المنحني Γ الممثل لدالتها المشتقة f'



ما هو معامل توجيه المماس للمنحني C عند النقطة التي فاصلتها 0 ؟

أ) 0 ب) -2 ج) 1

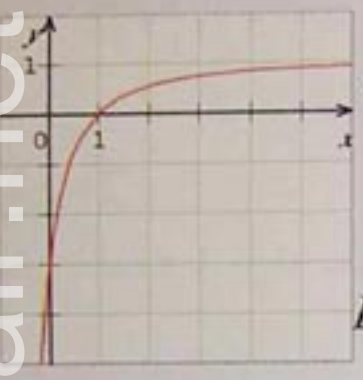
صحيح أم خاطئ

79 الدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و جدول تغيراتها هو التالي. أكد صحة أو خطأ العبارات التالية مع التبرير

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f(x)$	-1	↗	0	↘	-3	↗	2

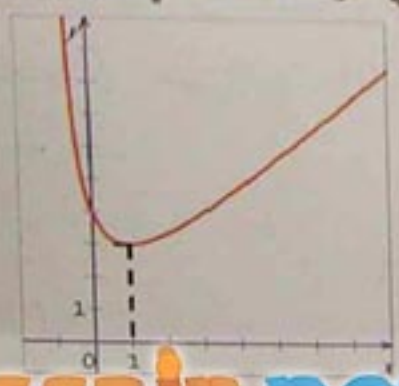
1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x)\geq -3$
2. على $]-\infty;-2]$: $f'(x)\leq 0$
3. $f(0)\leq f(1)$
4. المماس للمنحني الممثل للدالة f في النقطة التي فاصلتها 2 موازي للمستقيم الذي معادلته $y=x$
5. $f'(3)>0$

80 الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$. المنحني المقابل C يمثل الدالة المشتقة f' و هو يشمل النقطتين $A(1;0)$ و $B(0;-3)$ نسمي Γ المنحني الممثل للدالة f.



اذكر إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة أو لا يمكن الحكم عليها مع التبرير

1. المستقيم الذي معادلته $y=3$ مماس لـ Γ عند النقطة التي فاصلتها 1.
2. الدالة f متزايدة على المجال $]0;+\infty[$.
3. المماس للمنحني Γ في النقطة التي فاصلتها 0 يوازي المستقيم الذي معادلته $y=-3x$
4. المعادلة $f(x)=0$ لا تقبل حلولا في $]0;+\infty[$.
5. $f'(0)\leq f'(1)$
6. المماس للمنحني Γ في النقطة التي فاصلتها 0 معادلته من الشكل $y=a$
7. الشكل التالي هو تمثيل بياني ممكن للمنحني Γ



elbassair.net

4 الدوال الأصلية 4

الكفاءات المستهدفة

- تعريف دالة أصلية لدالة على مجال.
- تعيين مجموعة الدوال الأصلية لدالة على مجال.
- تعيين دالة أصلية لدالة تحقق شرطا معينا و تفسير ذلك بيانيا.

يستعمل مفهوم الدوال الأصلية كذلك في المجال الاقتصادي بحيث يتم تعيين الكلفة الإجمالية $C(q)$ لإنتاج معين باستعمال دالة أصلية للدالة الكلفة الهامشية $C_m(q)$ مما يسمح من تعيين الكلفة المتوسطة $C_M(q)$ للإنتاج.

" لكي يكون منتوج مؤسسة مربحا يجب أن لا تكون الكلفة المتوسطة لإنتاجه أكبر من ثمن بيعه ".

يعتبر الانجليزي إسحاق نيوتن و الألماني قوتفريد ولالم ليبنز مكتشفي الحساب التفاضلي و التكاملي.

توصل نيوتن إلى مفهومي المشتقة و الدالة الأصلية (العملية العكسية لحساب المشتقة) عن طريق علم الحركة.

فهو يعتبر المشتقة " سرعة " و دالة أصلية " مسافة ".

بالعكس من ذلك فقد توصل ليبنز إلى اكتشافاته بواسطة الهندسة و اختيار ترميزا مناسبا.



ولالم ليبنز
1646 م – 1716 م

إن هذا الاكتشاف المزدوج خلق بين الرجلين

و بين مدرستيهما صراعا حول الأولوية.



إسحاق نيوتن
1642 م – 1727 م

elbassair.net

النشاط الأول

1) نعتبر الدالتين f و F المعرفتين على $]-3;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{-x^2-6x}{(x+3)^2} \quad \text{و} \quad F(x)=\frac{2x-3}{x+3}-x$$

- تحقق أنه من أجل كل x من $]-3;+\infty[$، $F'(x)=f(x)$
- اقترح دالة أخرى G بحيث من أجل كل x من $]-3;+\infty[$، $G'(x)=f(x)$

نقول أن F و G دالتان أصليتان للدالة f على $]-3;+\infty[$.

تعريف: f و F دالتان معرفتان على مجال I و f قابلة للاشتقاق على I.

إذا كان من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$ نقول أن:

- f هي الدالة المشتقة للدالة F.
- F دالة أصلية للدالة f على I.

2) نعتبر الدالتين h و H المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x)=2x-3 \quad \text{و} \quad H(x)=x^2-3x+2$$

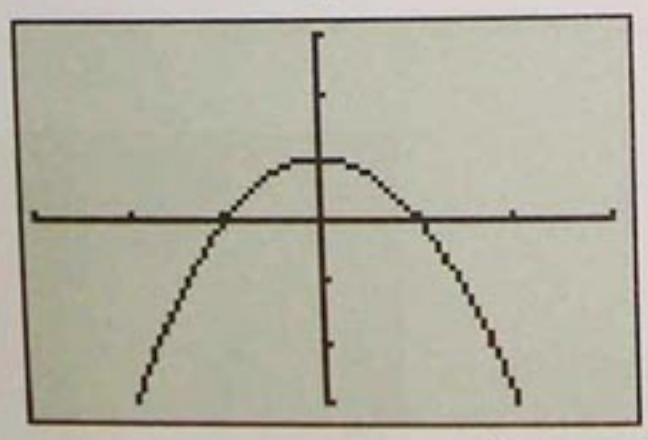
- بين أن الدالة H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.
- عين دالة أصلية أخرى للدالة h على $\mathbb{R}$.

3) عين دالة أصلية لكل دالة من الدوال التالية على المجال المعطى I:

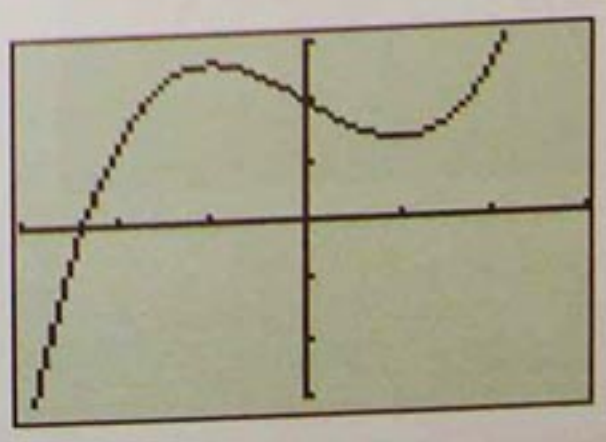
* $f_1(x)=x$ و $I=\mathbb{R}$. $f_2(x)=x^2$ و $I=\mathbb{R}$. $f_3(x)=-\frac{1}{x^2}$ و $I=]0;+\infty[$.
* $g_1(x)=3x$ و $I=\mathbb{R}$. $g_2(x)=x^2+2x-1$ و $I=\mathbb{R}$. $g_3(x)=\frac{2}{x^2}$ و $I=]0;+\infty[$.

4) رسمنا في الشكل المقابل على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني لدالة f معرفة على $\mathbb{R}$.

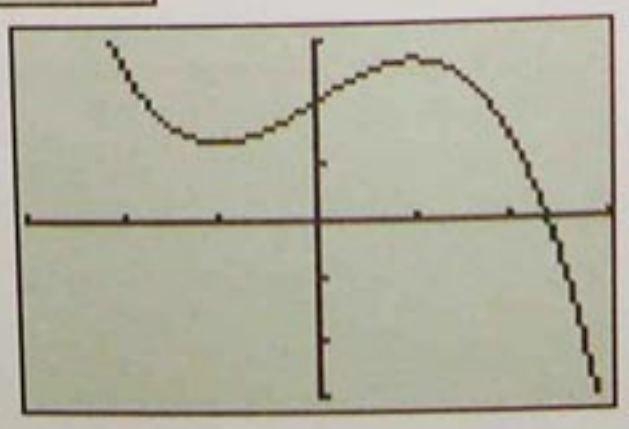
من بين التمثيلات البيانية التالية يوجد التمثيل البياني لدالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$. عينه مع التبرير.

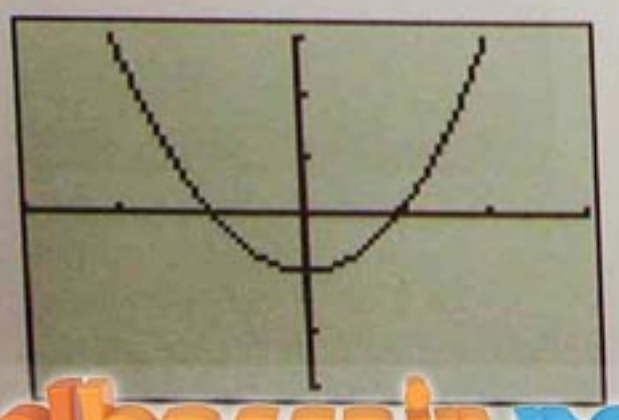


(1)



(2)



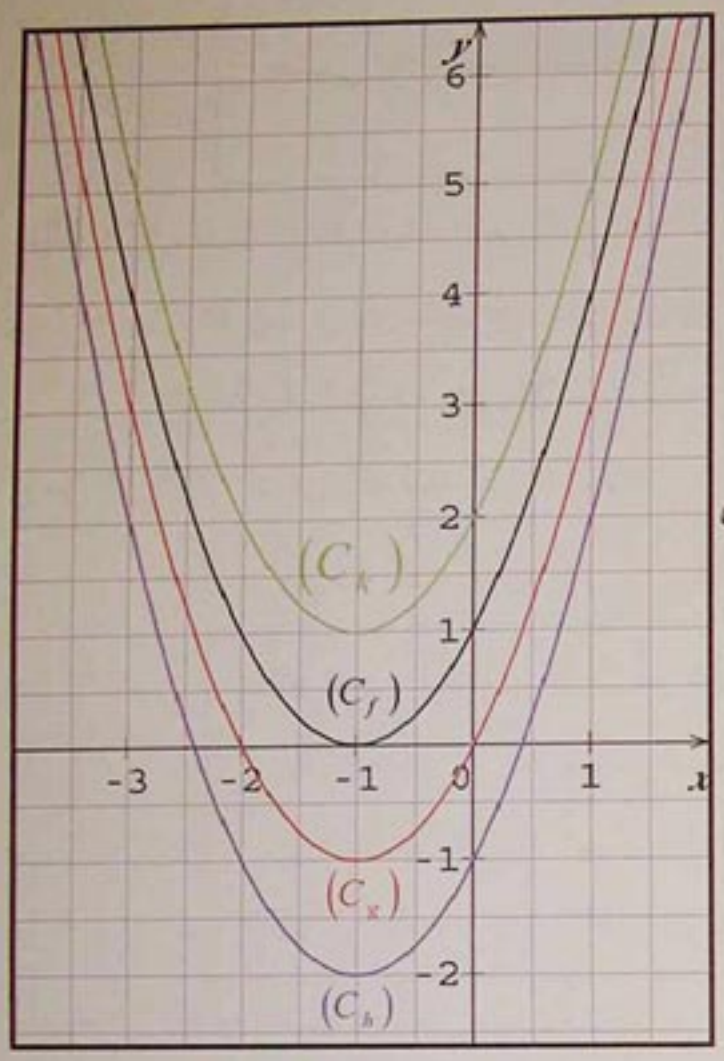


elbassair.net

النشاط الثاني

رسمنا في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحنيات البيانية (C_f) ، (C_g)، (C_h) و (C_k) الممثلة على الترتيب لدوال f ، g ، h و k معرفة على $\mathbb{R}$ و من الشكل:

$$\varphi : x \mapsto x^2 + bx + c$$



1. من خلال ملاحظة الشكل و بدراسة اتجاه تغير الدالة φ عين المعامل b ثم بين أن للدوال الأربعة f ، g ، h و k نفس المشتقة.
2. باستعمال نقطة تقاطع كل من المنحنيات (C_f) ، (C_g)، (C_h) و (C_k) مع حامل محور التراتيب، عين المعامل c مستنتجا عبارة كل من $f(x)$ ، $g(x)$ ، $h(x)$ و $k(x)$.
3. عين التحويل النقطي الذي يحول المنحني (C_f) إلى (C_g).
4. بين أنه توجد دالة وحيدة q، يطلب تعيينها، لها نفس المشتقة كالدالة f بحيث: $q(-2)=3$.

النشاط الثالث

لتكن f دالة معرفة على مجال I.

1. لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال I.

بين أن الدالة: $G : x \mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي هي كذلك دالة أصلية للدالة f على المجال I.

2. لتكن F و G دالتين أصليتين للدالة f على المجال I. بين أن الدالة $F-G$ دالة ثابتة على المجال I.
3. لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال I و ليكن x_0 عددا حقيقيا من المجال I.

بين أنه توجد دالة أصلية وحيدة G للدالة f على المجال I بحيث $G(x_0)=y_0$ علما أن y_0 عدد حقيقي ثابت.

4. لتكن F دالة أصلية للدالة f على المجال I و ليكن a و b عددين حقيقيين من المجال I.

بين أن العدد $F(b)-F(a)$ لا يتغير إذا استبدلنا الدالة الأصلية F بدالة أصلية أخرى G للدالة f على I.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

ـ الدوال الأصلية

1. الدالة الأصلية لدالة على مجال

تعريف: f دالة معرفة على مجال I.

نسمي دالة أصلية للدالة f على المجال I كل دالة F قابلة للاشتقاق على I مشتقتها F' هي f.

من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$

مثال: * الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=x^2-3x+1$ هي دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2x-3$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $F'(x)=2x-3=f(x)$.

* الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=x^2-3x-\sqrt{2}$ هي كذلك دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $G'(x)=2x-3=f(x)$.

2. مجموعة الدوال الأصلية لدالة

خواص (تقبل دون برهان):

* إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإن f تقبل دوالا أصلية على I.
* إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على المجال I فإن كل الدوال الأصلية للدالة f على I هي الدوال $x \mapsto F(x)+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

نتيجة: دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط.

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=3x^2+4x-2$. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال F المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $F(x)=x^3+2x^2-2x+k$ حيث k عدد حقيقي ثابت.

3. الدالة الأصلية التي تحقق شرطا معينا

خاصية: f دالة مستمرة على مجال I. x_0 عدد حقيقي من I و y_0 عدد حقيقي كيفي.

توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$.

البرهان: بما أن الدالة f مستمرة على I فهي تقبل دوالا أصلية على I و لتكن G إحدى هذه الدوال الأصلية.

إذا كانت F دالة أصلية أخرى للدالة f على I فإن من أجل كل x من I، $F(x)=G(x)+k$ حيث k عدد حقيقي.

الشرط $F(x_0)=y_0$ يعني أن $G(x_0)+k=y_0$ أي أن $k=y_0-G(x_0)$. لقد تم هكذا تحديد العدد الحقيقي k.

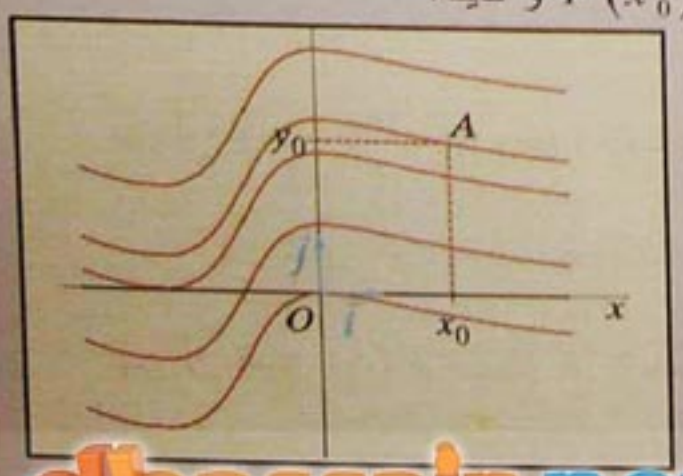
توجد إذن دالة أصلية وحيدة F للدالة f على المجال I تحقق الشرط $F(x_0)=y_0$ و لدينا:

$$F(x)=G(x)+y_0-G(x_0)$$

التفسير البياني:

التمثيلات البيانية في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ للدوال الأصلية للدالة f تستنتج من أحدها بواسطة انسحابات شعاعها $k\vec{j}$ حيث k عدد حقيقي.

واحد فقط من بين هذه التمثيلات البيانية يمر من النقطة $A(x_0;y_0)$.



elbassair.net

تمرين محلول1: نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2} \quad \text{و} \quad F(x)=\frac{x-1}{x+1}-2x$$

بين أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

طريقة: لإثبات أن F دالة أصلية لـ f على مجال I يكفي أن نثبت أن F قابلة للاشتقاق على I و أن من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$.

الحل: F دالة ناطقة معرفة على $]-1;+\infty[$ فهي إذن قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ و من أجل كل x من $]-1;+\infty[$

لدينا: $$F'(x)=\frac{1(x+1)-1(x-1)}{(x+1)^2}-2=\frac{2}{(x+1)^2}-2$$

و منه: $$F'(x)=\frac{2-2(x+1)^2}{(x+1)^2}=\frac{2\left[1-(x+1)^2\right]}{(x+1)^2}=\frac{2\left[(1-x-1)(1+x+1)\right]}{(x+1)^2}=\frac{-2x(x+2)}{(x+1)^2}$$

و بالتالي: $$F'(x)=\frac{-2x^2-4x}{(x+1)^2}=-\frac{2x^2+4x}{(x+1)^2}=f(x)$$

و هكذا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$، $F'(x)=f(x)$. إذن F دالة أصلية لـ f على المجال $]-1;+\infty[$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x-1$

1. عين كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
2. عين الدالة الأصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تحقق $F(2)=-1$.

الحل:

1. كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x\mapsto x^2-x+k$ حيث k عدد حقيقي.
2. لدينا من جهة $F(x)=x^2-x+k$ و لدينا من جهة ثانية $F(2)=-1$.

$F(2)=-1$ يعني $2^2-2+k=-1$ و منه $k=-3$. نجد هكذا أن $F(x)=x^2-x-3$

تمرين محلول3: نعتبر الدالتين F و G المعرفتين على $]2;+\infty[$ كما يلي:

$$F(x)=\frac{x^2-2x+3}{x-2} \quad \text{و} \quad G(x)=\frac{2x-1}{x-2}+x$$

باستعمال طريقتين مختلفتين بين أن F و G دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الحل: **الطريقة الأولى:** نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x)=G'(x)$

من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x)=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$ و $G'(x)=\frac{x^2-4x+1}{(x-2)^2}$

إذن من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F'(x)=G'(x)$. الدالتان هما إذن دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الطريقة الأولى: نبين أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F(x)-G(x)=k$ حيث k عدد حقيقي.

من أجل كل x من $]2;+\infty[$، $F(x)-G(x)=\left(\frac{x^2-2x+3}{x-2}\right)-\left(\frac{2x-1}{x-2}+x\right)=\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

ـ حساب الدوال الأصلية

1. الدوال الأصلية لدوال مألوفة

تم الحصول على النتائج الملخصة في الجدول الموالي انطلاقا من قراءة عكسية لمشتقات دوال مألوفة.

يمثل c عددا حقيقيا كيفيا.

f دالة معرفة على I بـ $f(x)=$	الدوال الأصلية لـ f على I هي الدوال المعرفة بـ $F(x)=$	المجال I هو
a (a عدد حقيقي)	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
x^n ($n\in\mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$
$\frac{1}{x^n}$ $(n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2)$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]0;+\infty[$ أو $]-\infty;0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$

2. الدوال الأصلية لـ $f+g$ و kf (k عدد حقيقي)

خواص:

* إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب لدالتين f و g على مجال I فإن $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I.
* إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن kF دالة أصلية للدالة kf على I $(k\in\mathbb{R})$

3. الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I.

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2+c$	
$u'u^n$ ($n\in\mathbb{N}^*$)	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$ $(n\in\mathbb{N}$ و $n\geq 2)$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)>0$

elbassair.net

تمرين محلول1: عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

* $f(x)=x^3-3x+5$ و $I=\mathbb{R}$ * $g(x)=\dfrac{2}{x^2}$ و $I=]-\infty;0[$ * $h(x)=\dfrac{3}{x^3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ و $I=]0;+\infty[$

الحل:

* دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ معرفة بـ :

$$F(x)=\frac{1}{3+1}x^{3+1}-3\times\frac{1}{2}x^2+5x=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+5x$$

* دالة أصلية G للدالة g على $I=]-\infty;0[$ معرفة بـ :

$$G(x)=2\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{2}{x}$$

* دالة أصلية H للدالة h على $I=]0;+\infty[$ معرفة بـ :

$$H(x)=3\left(-\frac{1}{(3-1)x^{3-1}}\right)-2\sqrt{x}=-\frac{3}{2x^2}-2\sqrt{x}$$

تمرين محلول2: عين دالة أصلية على المجال I المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

* $f(x)=(x+1)\left(x^2+2x+5\right)^2$ و $I=\mathbb{R}$ * $g(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$ و $I=\mathbb{R}$

طريقة: لتعيين دالة أصلية على مجال I لدالة f يمكننا:

1. ملاحظة إذا كانت f تكتب على أحد الأشكال $u'u^n$ أو $\dfrac{u'}{u^n}$ أو $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ مع تحديد عبارة $u(x)$.
2. حساب $u'(x)$ ثم تحديد عددا حقيقيا k بحيث $f=k\times u'u^n$ أو $f=k\times\dfrac{u'}{u^n}$ أو $f=k\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.
3. تطبيق قواعد الدوال الأصلية.

الحل:

- يظهر و أن الدالة f من الشكل $u'u^n$ مع $u(x)=x^2+2x+5$.

لدينا $u'(x)=2x+2$ أي أن $u'(x)=2(x+1)$ و منه $x+1=\dfrac{1}{2}u'(x)$

نجد هكذا أن: $f(x)=\dfrac{1}{2}u'(x)\times\left[u(x)\right]^2$ أي أن $f=\dfrac{1}{2}\times u'u^2$.

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F(x)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\left[u(x)\right]^3$ أي $F(x)=\dfrac{1}{6}\left(x^2+2x+5\right)^3$.

- يظهر و أن الدالة g من الشكل $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ مع $u(x)=x^2+1$.

لدينا $u'(x)=2x$ أي أن و منه $3x=\dfrac{3}{2}u'(x)$ نجد هكذا أن: $g(x)=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ أي أن $g=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$.

و بالتالي فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $G(x)=\dfrac{3}{2}\times2\sqrt{u(x)}=3\sqrt{u(x)}$ أي $G(x)=3\sqrt{x^2+1}$.

elbassair.net

موقع البصائر التعليمي

من الكلفة الهامشية إلى الكلفة الإجمالية

تنتج إحدى الوحدات منتوجا بكمية q حيث $0 \le q \le 100$.

نلاحظ أن الكلفة الهامشية المقدرة بـ DA لإنتاج وحدة إضافية هي:

$$C_m(q) = \frac{9}{100}q^2 - \frac{46}{10}q + 65 \quad \text{حيث} \quad 0 \le q \le 100$$

تقدر المصاريف الثابتة للوحدة من أجل إنتاج هذه الكمية بـ $250\,DA$.

نقبل أن الدالة " الكلفة الإجمالية " C هي دالة أصلية للدالة " الكلفة الهامشية " C_m على المجال $[0;100]$.

عين عبارة $C(q)$ بدلالة q على المجال $[0;100]$.

من الكلفة الهامشية إلى الكلفة المتوسطة

تنتج إحدى الوحدات منتوجا بكمية q حيث $0 \le q \le 15$.

الكلفة الهامشية المقدرة بـ DA لإنتاج وحدة إضافية معرفة على المجال $[0;15]$ بـ:

$$C_m(q) = 3q^2 - 36q + 750$$

1. الكلفة الإجمالية

نذكر أن الكلفة الإجمالية C دالة أصلية على المجال $[0;15]$ للدالة الكلفة الهامشية C_m.

نعلم بالإضافة إلى ما سبق أن المصاريف الثابتة تقدر بـ $200\,DA$.

عين بدلالة q عبارة $C(q)$ على المجال $[0;15]$.

2. الكلفة المتوسطة

نعلم أن الدالة الكلفة المتوسطة C_M معرفة على المجال $]0;15]$ بـ $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$.

- عين بدلالة q عبارة $C_M(q)$ على المجال $]0;15]$.
- أحسب $C_M'(q)$ ثم تحقق أنه من أجل كل q من $]0;15]$ لدينا:

$$C_M'(q) = \frac{2(q-10)(q^2+q+10)}{q^2}$$

- أدرس إشارة $C_M'(q)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة C_M على المجال $]0;15]$.
- عين الكمية q التي يجب إنتاجها حتى تكون الكلفة المتوسطة أصغر ما يمكن.
- أحسب في هذه الحالة الكلفة المتوسطة و الكلفة الهامشية. ما ذا تلاحظ ؟

3. قراءة بيانية

- أرسم في نفس المعلم التمثيلين البيانيين للدالتين C_m و C_M بحيث يمثل $1cm$ منتوجا واحدا على محور الفواصل و يمثل $1cm$ $100\,DA$ على محور التراتيب.
- باستعمال الرسم السابق، قارن بين الكلفة الهامشية و الكلفة المتوسطة.

elbassair.net

دوال " الرضا " و " الرغبة "

في مجال الاقتصاد نسمي الدالة " الرضا " كل دالة f معرفة على مجال I و تأخذ قيمها في المجال $[0;100]$.

و نسمي الدالة v حيث $v = f'$ بالدالة " الرغبة ".

نقول أنه توجد " رغبة " عندما تكون v موجبة و إلا فنقول أن هنالك " رفض ".

1. من الرضا إلى الرغبة

دالة" الرضا " f الممثلة في الشكل الموالي معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[0;8]$.



- عين قيمة x التي يكون من أجلها الرضا أعظميا.
- عين المجالات التي توجد فيها " رغبة " و المجالات التي يوجد فيها " رفض ".
- بواسطة قراءة بيانية عين $v(4)$.
- عبر عن $v(x)$ بدلالة x علما أن الدالة v دالة تآلفية معرفة على المجال $[0;8]$ و أن $v(0) = 50$.

2. من الرغبة إلى الرضا

تم نمذجة دالة" الرغبة " v من أجل راتب في إحدى المؤسسات على النحو التالي:

من أجل كل x من المجال $[0;+\infty[$، $v(x) = \dfrac{100}{(x+1)^2}$

بحيث يمثل x الراتب الشهري مقدر بآلاف الدنانير لعامل من عمال المؤسسة.

- نذكر أن الدالة" الرضا " f هي دالة أصلية للدالة v على المجال $[0;+\infty[$. علما أن $f(0) = 0$ بين أن:

$$f(x) = \frac{100x}{x+1}$$

- عين نهاية الدالة f لما يؤول x إلى $+\infty$. فسر بيانيا هذه النتيجة.
- أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $[0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
- مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحنى الممثل للدالة f.
- أعط تفسيرا لهذا المنحنى مرتبط بالرضا.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

موضوع محلول

أ- **دراسة دالة:** نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;700]$ بـ $f(x)=\frac{1}{25}x+100+\frac{540000}{x^2}$

1. أحسب نهاية الدالة f عند 0. فسر بيانيا النتيجة.
2. بين أنه من أجل كل x من $]0;700]$، $f'(x)=\frac{(x-300)(x^2+300x+90000)}{25x^3}$
3. استنتج اتجاه تغير الدالة f.

ب- **تطبيق اقتصادي:** تنتج إحدى الورشات على الأقل 100 وحدة و على الأكثر 700 وحدة. توصف الكلفة الهامشية C_m لإنتاج وحدة إضافية على المجال $[100;700]$ بالدالة f المعرفة في الجزء أ. لدينا إذن:

$$C_m(x)=f(x) \text{ من أجل } x\in[100;700]$$

نرمز بـ $C(x)$ إلى الكلفة الإجمالية لإنتاج x وحدة.

علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج المائة (100) وحدة الأولى هي $16000\,DA$، عين عبارة الكلفة الإجمالية $C(x)$.

حل مختصر

أ- 1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{25}x+100\right)=100$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{540000}{x^2}=+\infty$

و منه حسب مبرهنة نهاية مجموع لدينا: $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$

2) من أجل كل x من $]0;700]$ لدينا:

$$f'(x)=\frac{1}{25}-\frac{1080000}{x^3}=\frac{x^3-27000000}{25x^3}$$

لدينا من جهة ثانية من أجل كل x من $]0;700]$:

$$\frac{(x-300)(x^2+300x+90000)}{25x^3}=\frac{x^3-27000000}{25x^3}$$

3) $25x^3>0$ و بما أن مميز $x^2+300x+90000$ سالب فإن $x^2+300x+90000>0$ على المجال $]0;700]$ و منه إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $x-300$ و بالتالي فإن f متناقصة تماما على $]0;300]$ و متزايدة تماما على $[300;700]$.

ب- نعلم أن $C'=C_m$ و من فإن C دالة أصلية للدالة C_m على المجال $[100;700]$ و بما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج المائة (100) وحدة الأولى هي $16000\,DA$ فإن C هي الدالة الأصلية لـ C_m و التي تحقق $C(100)=16000$. و هكذا لدينا:

$C(x)=\frac{1}{50}x^2+100x-\frac{540000}{x}+c$ مع c ثابت حقيقي

$C(100)=16000$ تعني $c=11200$ و بالتالي فإن:

$$C(x)=\frac{1}{50}x^2+100x-\frac{540000}{x}+11200$$

تعاليق

- لا نكتفي بكتابة $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ و لكن لابد من تبرير هذه النتيجة.

- نقوم أولا بحساب $f'(x)$ باستعمال قواعد الاشتقاق. لا نكتفي بإعطاء النتيجة الواردة في النص و إنما يجب تبريرها.

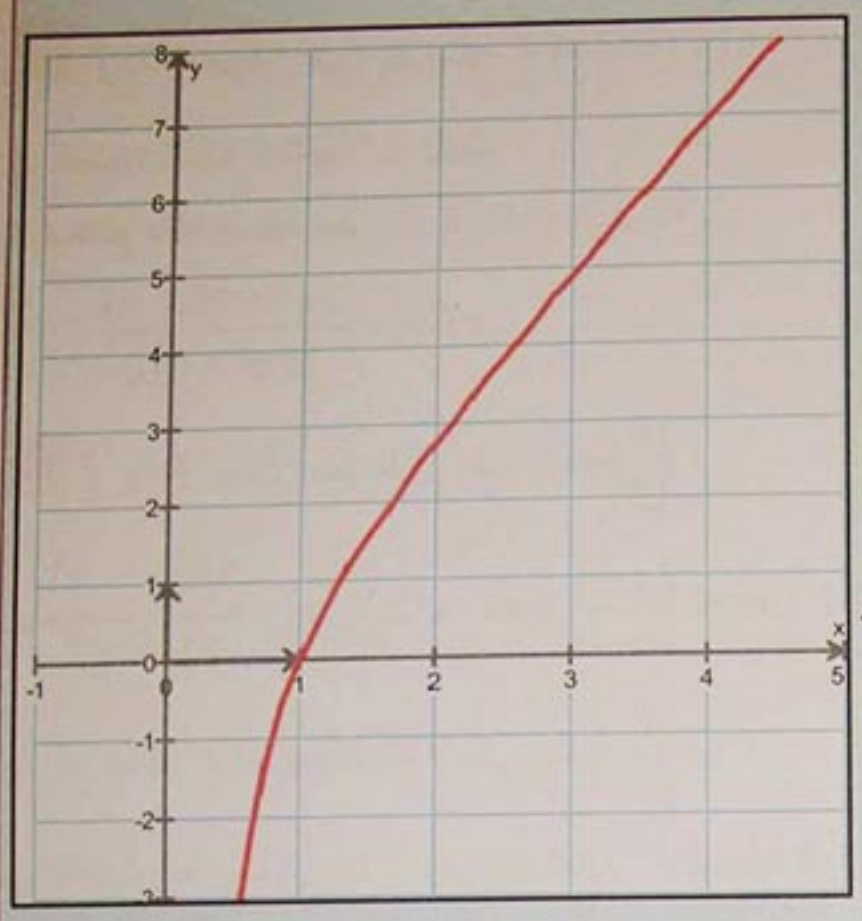
- نذكر أن إشارة $ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ هي من نفس إشارة a في حالة $\Delta<0$.

نستعمل هنا دوال أصلية لدوال مألوفة و كذلك العمليات على الدوال الأصلية.

elbassair.net

موضوع مع إرشادات

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=2x-1-\frac{1}{x^2}$ و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ (أنظر الشكل المقابل).



الجزء الأول

1. باستعمال المنحنى (C) ضع تخمينا حول اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.
   أثبت صحة التخمين.
2. استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $]0;+\infty[$. كيف يترجم ذلك على التمثيل البياني المقابل ؟
3. باستعمال المنحنى (C) ضع تخمينا حول نهاية f عند 0.
   أثبت صحة التخمين.
4. بين أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

الجزء الثاني

لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]0;+\infty[$ بحيث $F(1)=-2$.

1. استنتج من الجزء الأول اتجاه تغير الدالة F على المجال $]0;+\infty[$.
2. عين عبارة $F(x)$ بدلالة x .
3. أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.
4. شكل جدول تغيرات الدالة F .
5. أرسم في معلم متعامد و متجانس (Γ) التمثيل البياني للدالة F .

إرشادات

الجزء الأول

1. لإثبات صحة التخمين يمكنك استعمال مشتقة الدالة f أو استعمال اتجاه تغير الدالتين:
   $x\mapsto 2x-1$ و $x\mapsto -\frac{1}{x^2}$ على المجال $]0;+\infty[$.
2. " استنتج " تعني هنا أنه للإجابة على السؤال لابد من استعمال اتجاه تغير الدالة f المعين في السؤال 1.
   لا تنسى التحقق من أن $f(1)=0$.

الجزء الثاني

1. " استنتج من الجزء الأول " تعني أن لابد من الربط بين الدالتين f و F (تعريف دالة أصلية) ثم البحث عن النتائج المحصل عليها في هذا الجزء و التي تسمح من تحديد إشارة $F'(x)$.
   الدالة f عبارة عن مجموع دوال مألوفة عليك معرفة دوال أصلية لها على المجال $]0;+\infty[$.لا تنسى استغلال الشرط $F(1)=-2$.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

تمارين

تمارين تطبيقية

1 - الدوال الأصلية

1 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{x+5}{2x^2+3}$

1. احسب الدالة المشتقة f' للدالة f.

2. استنتج دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة g المعرفة بـ

$$g(x)=\frac{2x^2+20x-3}{(2x^2+3)2}$$

2 f و F دالتان معرفتان على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ $f(x)=\dfrac{16(x^2-1)}{(2x-1)^2}$ و $F(x)=\dfrac{2x+1}{2x-1}+4x$

بين أن الدالة F أصلية للدالة f على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

في التمارين من **3** إلى **12** بين أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال D

3 $F:x\mapsto x^2-3x+1$ ، $f:x\mapsto 2x-3$ ، $D=\mathbb{R}$

4 $F:x\mapsto x^3-6x^2+9x$ ، $f:x\mapsto 3x^2-12x+9$ ، $D=\mathbb{R}$

5 $F:x\mapsto 2+\dfrac{x+1}{x-1}$ ، $f:x\mapsto \dfrac{-2}{(x-1)^2}$ ، $D=]1;+\infty[$

6 $F:x\mapsto \dfrac{x+1}{x^2-1}$ ، $f:x\mapsto \dfrac{-x^2-2x-1}{(x^2-1)^2}$ ، $D=]1;+\infty[$

7 $F:x\mapsto \dfrac{x^2+2x-3}{x}$ ، $f:x\mapsto 1+\dfrac{3}{x^2}$ ، $D=]0;+\infty[$

8 $F:x\mapsto \dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$ ، $f:x\mapsto \sqrt{x}$ ، $D=]0;+\infty[$

9 $F:x\mapsto -5+\sqrt{3x-12}$ ، $f:x\mapsto \dfrac{3}{2\sqrt{3x-12}}$ ، $D=]4;+\infty[$

10 $F:x\mapsto \dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$ ، $f:x\mapsto \dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$ ، $D=]2;+\infty[$.

11 $F:x\mapsto \dfrac{x^3}{x-1}$ ، $f:x\mapsto \dfrac{2x^3-3x^2}{(x-1)^2}$ ، $D=]1;+\infty[$

12 $F:x\mapsto \dfrac{2x-3}{x^2-3x+2}$ ، $f:x\mapsto \dfrac{-2x^2+6x-5}{(x^2-3x+2)^2}$ ، $D=]2;+\infty[$

13 F و G دالتان معرفتان على $]0;+\infty[$ بـ:

$F(x)=\dfrac{x^2+2x-4}{(x+1)^2}$ و $F(x)=\dfrac{5}{(x+1)^2}-1$

تحقق أن الدالتين F و G أصليتان لنفس الدالة

1) جبريا 2) باستعمال المشتقة

في التمارين من **14** إلى **20** اذكر إن كانت الدالتان F و G أصليتان لنفس الدالة f على المجال المعطى:

14 $F(x)=x^2+2x+3$ ، $G(x)=x^2-2x+3$ ، $I=\mathbb{R}$

15 $F(x)=x^3+x+3$ ، $G(x)=x^3+x-15$ ، $I=\mathbb{R}$

16 $F(x)=\dfrac{400}{x-100}$ ، $G(x)=\dfrac{4x}{x-100}$ ، $I=]100;+\infty[$

17 $F(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ ، $G(x)=\dfrac{3x-3}{x-2}$ ، $I=]2;+\infty[$

18 $F(x)=\dfrac{5x^2-x+3}{x^2+x+1}$ ، $G(x)=\dfrac{-6x-2}{x^2+x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

19 $F(x)=\dfrac{x^2+x-3}{x-1}$ ، $G(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$ ، $I=]-\infty;1[$

elbassair.net

20 $G(x)=-2+\dfrac{x^2+1}{x}$ و $F(x)=x+\dfrac{1}{x}$

$D=]0;+\infty[$.

21 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$$f(x)=\frac{1}{10}x+\frac{1}{100}$$

1. أعط دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
2. أعط كل الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
3. جد الدالة الأصلية F للدالة f و التي تحقق $F(1)=1$

22 f دالة معرفة على $]-\infty;0[$ بـــ:

$$f(x)=-3x+4-\frac{1}{x^2}$$

1. اعط دالة أصلية للدالة f على $]-\infty;0[$.
2. اعط كل الدوال الأصلية للدالة f على $]-\infty;0[$.
3. جد الدالة الأصلية F للدالة f و التي تحقق $F(-1)=5$

23 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـــ:

$$f(x)=2x-1-\frac{2}{\sqrt{x}}$$

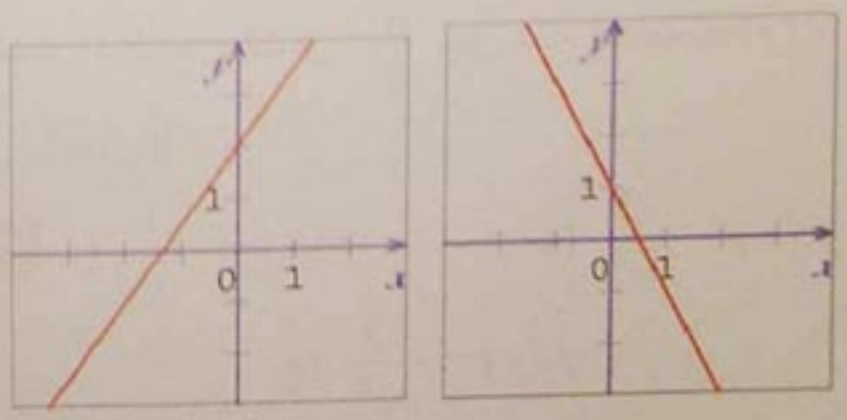
1. أعط كل الدوال الأصلية للدالة f على $]0;+\infty[$.
2. جد الدالة الأصلية F للدالة f و التي تحقق $F(4)=0$.

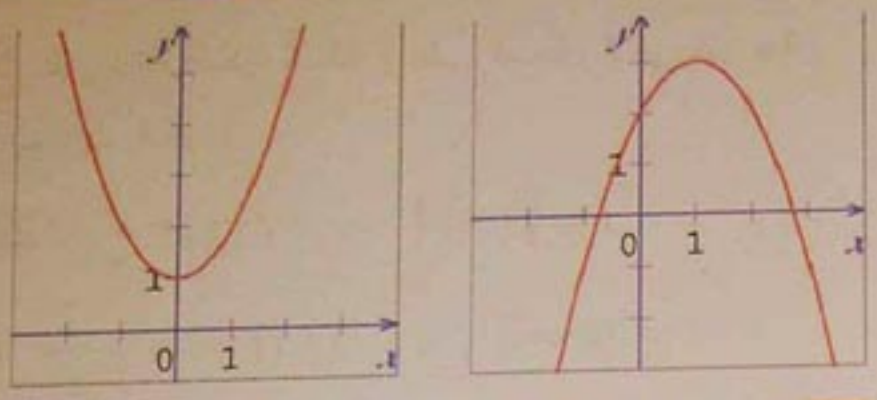
24 f و F دالتان معرفتان على $]1;+\infty[$ بـــ

$$F(x)=\frac{ax^2+bx+c}{1-x} \quad \text{و} \quad f(x)=\frac{-x^2+2x+2}{(1-x)^2}$$

عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حتى تكون الدالة F أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$ حيث $F(0)=3$.

25 f دالة تآلفية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و F دالة أصلية لـــ f على $\mathbb{R}$.أحد المنحنيات التالية هو للدالة F ما هو؟برر





26 f و F دالتان معرفتان على $]1;+\infty[$ بـــ

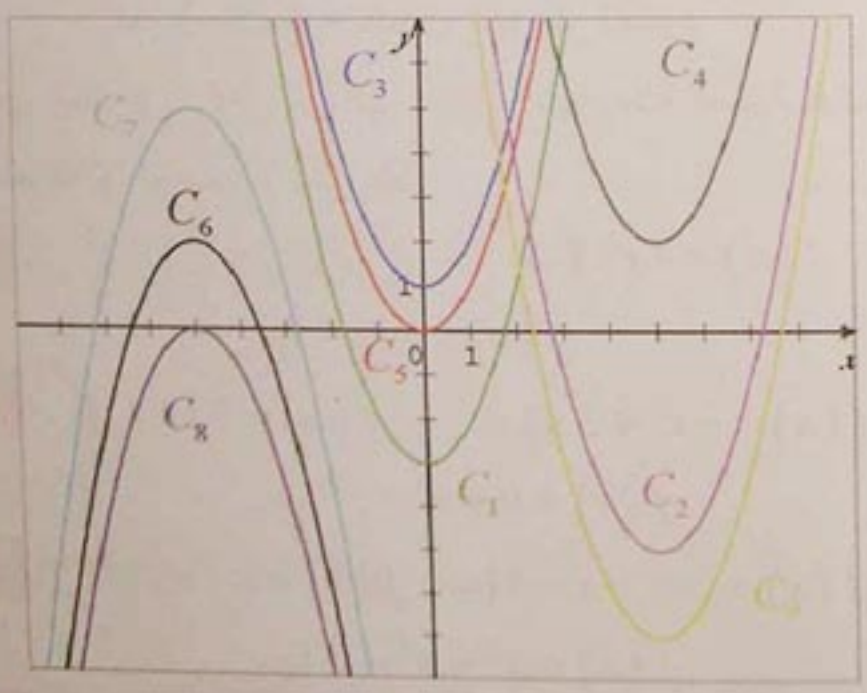
$$f(x)=\frac{3}{(1-x)^2} \quad \text{و} \quad F(x)=\frac{2x+1}{1-x}$$

1. بين أن الدالة F أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$.
2. استنتج الدالة الأصلية G للدالة f التي تأخذ القيمة $\dfrac{1}{2}$ عند 3.

27 المنحنيات من C_1 إلى C_9 هي التمثيلات البيانية لـــ 9 دوال (من F_1 إلى F_9 على الترتيب)،كل دالة من هذه الدوال هي دالة أصلية لإحدى الدوال f ، g و h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ:

$f(x)=2x$ ، $g(x)=2x-10$

و $h(x)=-2x-10$



من بين الدوال من F_1 إلى F_9 ، اذكر الدوال الأصلية لكل من الدوال f ، g و h .

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

2 - حساب الدوال الأصلية

28 عين دالة أصلية للدالة f على المجال I في كل حالة من الحالات التالية:

أ) $f(x)=\frac{1}{x^2}+2x$ ، $I=]0;+\infty[$

ب) $f(x)=3x^3-\frac{2}{x^2}$ ، $I=]0;+\infty[$

ج) $f(x)=x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}-3$ ، $I=]0;+\infty[$

• في التمارين من **29** إلى **31** جد دالة أصلية F للدالة f و التي تحقق الشرط المعطى

29 أ) $f(x)=2x+3$ ؛ $F(1)=0$

ب) $f(x)=1-3x$ ؛ $F(2)=-3$

ج) $f(x)=0,1x+100$ ؛ $F(-1)=0$

30 أ) $f(x)=3x^2+2x$ ؛ $F(20)=0$

ب) $f(x)=3-6x^2$ ؛ $F(3)=15$

ج) $f(x)=30x^2-100x+40$ ؛ $F(0)=0$

31 أ) $f(q)=4q^3$ ؛ $F(1)=101$

ب) $f(q)=q^3-50q^2+60q-1000$ ؛ $F(1)=0$

ج) $f(t)=50t^3+150t^2+750$ ؛ $F(0)=0$

الدوال الأصلية للدوال كثيرات الحدود

• في التمارين **32** من إلى **36** عين دالة أصلية للدالة f المعرفة و المستمرة على $\mathbb{R}$

32 أ) $f(x)=-3x$ ، ب) $f(x)=4x^2$ ، ج) $f(x)=-5x^4$

33 أ) $f(x)=2x+1$ ؛ ب) $f(x)=-x^2+3$ ، ج) $f(x)=0,5x^3+x^2$

34 أ) $f(x)=x^2+x+1$ ؛ ب) $f(x)=2x^2-x+3$ ، ج) $f(x)=x^3-x^2+1$

35 أ) $f(x)=2x^3-4x^2-3x-1$ ، ب) $f(x)=3x^3+2x^2-x$ ، ج) $f(x)=-7x^3+5x^2-2x+3$

36 أ) $f(x)=(x-1)(x+4)$ ، ب) $f(x)=(2x-3)(2x+3)$ ، ج) $f(x)=x^2(3-4x)$

• في التمارين **37** من إلى **42** ، و بتطبيق قاعدة الدالة الأصلية لدالة من الشكل $u'u^{\alpha}$ عين دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

37 أ) $f(x)=(x+1)^3$ ، ب) $f(x)=(x-3)^4$ ، ج) $f(x)=(x+8)^5$

38 أ) $f(x)=2(2x-1)^3$ ، ب) $f(x)=-4(-4x+2)^3$ ، ج) $f(x)=10(10x-7)^5$

39 أ) $f(x)=(2x+5)^3$ ، ب) $f(x)=(2-7x)^4$ ، ج) $f(x)=\left(\frac{2}{3}x-4\right)^5$

40 أ) $f(x)=(x+1)^3-2(2x+5)^3$ ، ب) $f(x)=(3x-4)^5-3(2-3x)^4$ ، ج) $f(x)=\frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}x-1\right)^5+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-4\right)^5$

41 أ) $f(x)=(4x+1)(2x^2+x-1)^3$ ، ب) $f(x)=(6x^2-1)(2x^3-x+1)^4$ ، ج) $f(x)=(3x^2+2x-1)(x^3+x^2-x)^3$

42 أ) $f(x)=24(x^2+x)(2x^3+3x^2-1)^3$ ، ب) $f(x)=2x^2(8x+3)(2x^4+x^3+1)^4$ ، ج) $f(x)=5x(3x+2)(x^3+x^2)^3$

الدوال الأصلية للدوال الناطقة

• في التمارين **43** من إلى **47** ، و بتطبيق قاعدة الدالة الأصلية لدالة من الشكل $\frac{u'}{u^{\alpha}}$ عين دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$

43 أ) $f(x)=-\frac{1}{x^2}$ ، ب) $f(x)=-\frac{2}{x^3}$ ، ج) $f(x)=-\frac{3}{x^4}$

elbassair.net

44 أ) $f(x)=\frac{1}{x^3}$ ، ب) $f(x)=\frac{2}{x^4}$

ج) $f(x)=\frac{3}{x^5}$

45 أ) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ ، ب) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^3}$

ج) $f(x)=\frac{1}{(x+1)^5}$

46 أ) $f(x)=\frac{2}{(2x+1)^2}$ ب) $f(x)=\frac{3}{(3x+2)^3}$

ج) $f(x)=\frac{4}{(1+4x)^4}$

47 أ) $f(x)=\frac{1}{(2x+1)^2}$ ، ب) $f(x)=\frac{1}{(3x-2)^3}$

ج) $f(x)=\frac{1}{(1-6x)^4}$

• في التمارين **48** من إلى **50** ، و بتطبيق قاعدة الدالة الأصلية لدالة من الشكل $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ عين دالة أصلية للدالة f على $]0;+\infty[$

48 أ) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ ، ب) $f(x)=\frac{2}{\sqrt{2x+1}}$

ج) $f(x)=\frac{10}{\sqrt{10x-5}}$

49 أ) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، ب) $f(x)=\frac{3x^2+1}{\sqrt{x^3+x}}$

ج) $f(x)=\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

50 أ) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ ، ب) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

ج) $f(x)=\frac{6x^2+4x}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$

51 إليك نص السؤال و الحل المقترح له من قبل تلميذ ، أعد صياغة هذا الحل آخذا ملاحظات المصحح بعين الاعتبار.

نص السؤال: f دالة معرفة على $]-\infty;0[$ بـ:

$$f(x)=\frac{2x^4-1}{2x}$$

عين جميع الدوال الأصلية F للدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

الحل المقترح:

$f(x)=\frac{2x^4-1}{2x}=x^3-1$

خطأ في الاختزال

إذن:

$F(x)=\frac{1}{4}x^4-x$

المطلوب تعيين كل الدوال الأصلية

52 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}$

جد دالة F تحقق $F'(x)=f(x)$

53 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+3}{x^2}$$

جد دالة أصلية F للدالة f على $]0;+\infty[$ تحقق $F(1)=-1$

54 1. جد دالة أصلية على المجال $]1;+\infty[$ لكل من الدالتين:

$x\mapsto\frac{1}{(x-1)^3}$ و $x\mapsto\frac{1}{(x-1)^4}$

2. لتكن الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x}{(x-1)^4}$$

أ- عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي x من $]1;+\infty[$:

$$f(x)=\frac{a}{(x-1)^3}+\frac{b}{(x-1)^4}$$

ب- استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $[2;3]$.

55 f دالة معرفة على $]2;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^3-6x^2+12x-4}{(x-2)^2}$$

1. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c حيث من أجل كل عدد حقيقي $x>2$: $f(x)=ax+b+\frac{c}{(x-2)^2}$

2. استنتج دالة أصلية F للدالة f على $]2;+\infty[$ تحقق $F(3)=-1$.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

تمارين

56 f دالة معرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـــ:

$$f(x)=\frac{8x^2-8x+3}{(2x-1)^2}$$

1. عين العددين الحقيقيين a و b حيث من أجل كل عدد حقيقي $x>\frac{1}{2}$: $f(x)=a+\frac{b}{(2x-1)^2}$

2. استنتج الدالة الأصلية F للدالة f على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ التي تنعدم من أجل 1.

تمارين للتعمق

57 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـــ:

$$f(x)=\frac{x^3+3x^2+3x}{(x+1)^2}$$

1. احسب $g(x)=f(x)-(1+x)$ و تحقق أن $g(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}$

2. عين دالة أصلية G للدالة g على $]0;+\infty[$.

3. استنتج دالة أصلية F للدالة f على $]0;+\infty[$.

58 f دالة معرفة على $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$ بـــ:

$$f(x)=\sqrt{2x+3}$$

عين عددين حقيقيين a، b حيث تكون الدالة F المعرفة بـــ $F(x)=(ax+b)\sqrt{2x+3}$ أصلية للدالة f على المجال $\left]-\frac{3}{2};+\infty\right[$.

59 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـــ:

$$f(x)=\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)\times\frac{9}{(x+1)^2}$$

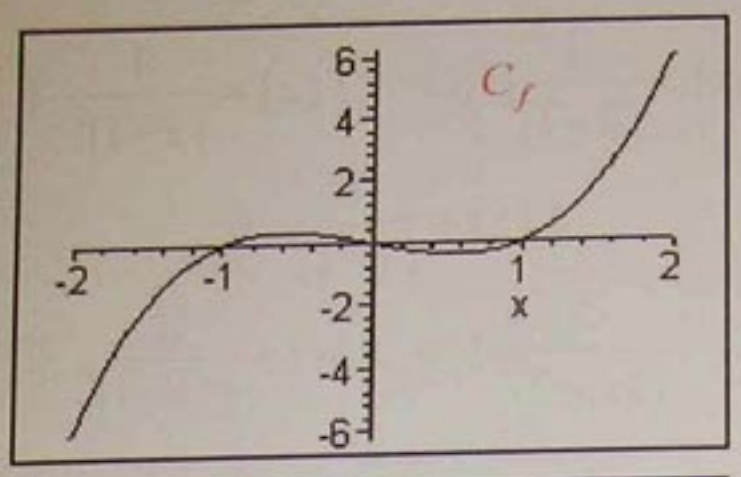
1. بوضع $u(x)=\frac{2x+1}{x+2}$، احسب $u'(x)$

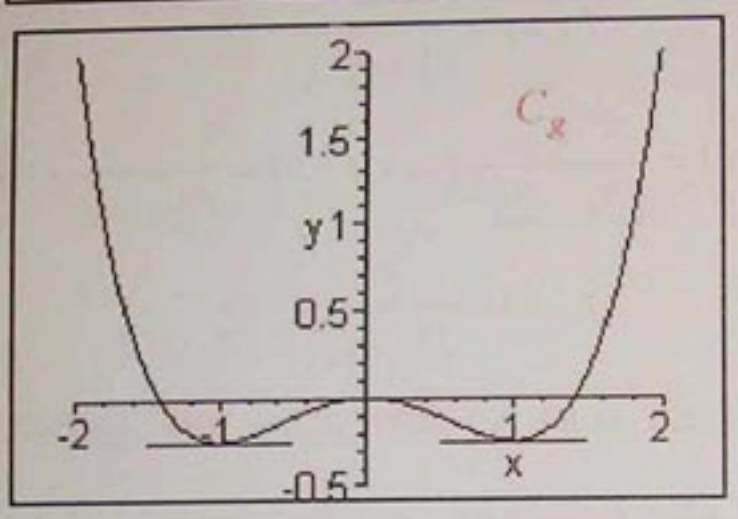
2. عين دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}^+$.

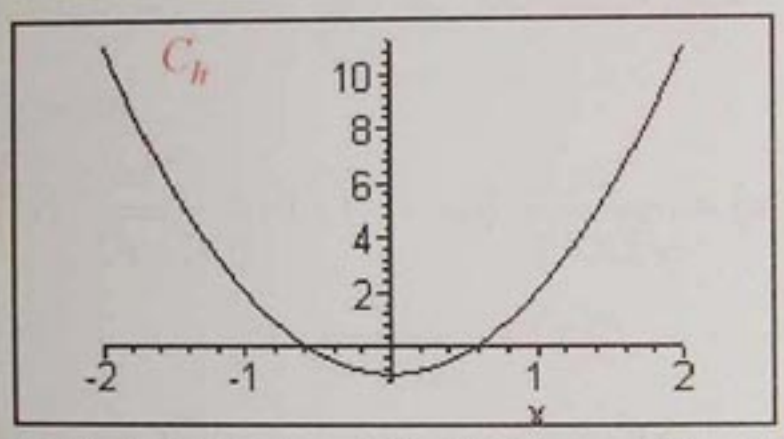
60 نعتبر ثلاث دوال f، g و h معرفة و قابلة للاشتقاق على المجال $[-2;2]$.

1. علما أن الدالة f تقبل دالة أصلية على المجال $[-2;2]$ من بين الدالتين g و h . ما هي؟ برر.

2. علما أن الدالة h تقبل دالة أصلية على المجال $[-2;2]$ من بين الدالتين f و g . ما هي؟ برر.

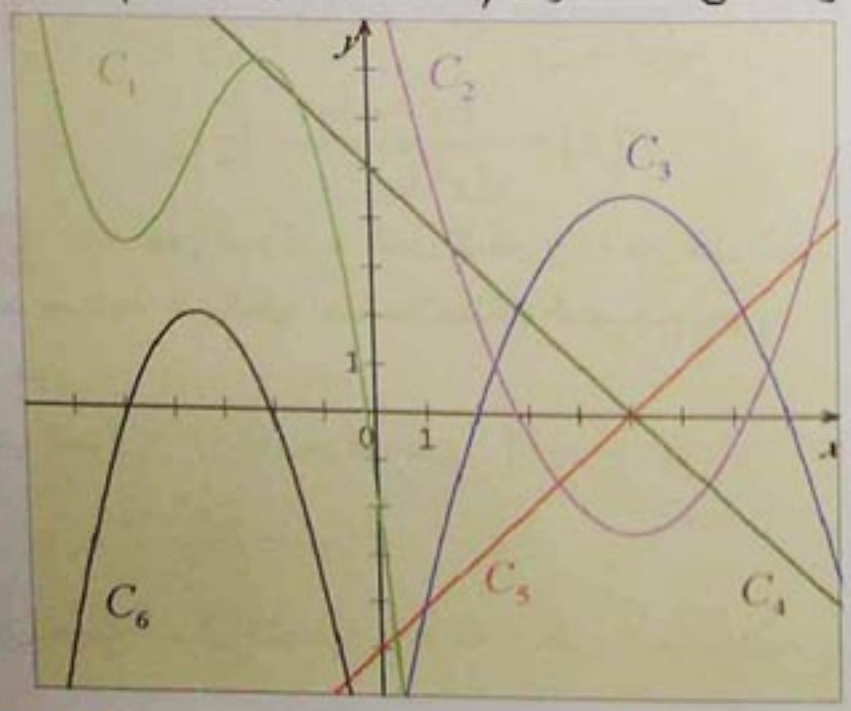






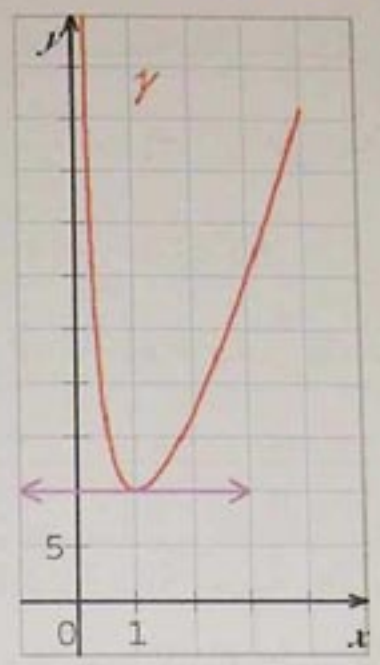
61 المنحنيات من C_1 إلى C_6 هي التمثيلات البيانية لـــ6 دوال (f_1 إلى f_6 على الترتيب)، ثلاثة من هذه الدوال هي دوال أصلية لثلاثة دوال أخرى.

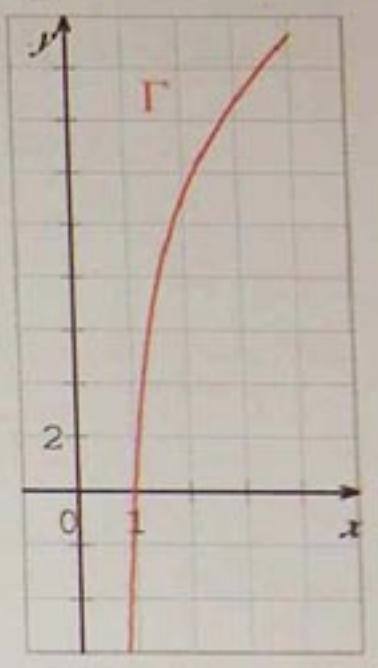
تعرّف على هذه الدوال (الدالة ← دالتها الأصلية)



elbassair.net

62 المنحني Γ هو التمثيل البياني للدالة " الكلفة الهامشية" C_m لمنتوج على المجال $[0;4[$ ، بالنسبة للمنحني γ ، المماس عند النقطة التي فاصلتها 1 معادلته $y=10$





1. اشرح لماذا المنحني γ يمكن أن يمثل الدالة " الكلفة الإجمالية " C ؟

2. عين العددين الحقيقيين a و b علما أن :

$$C_m(q)=aq+b-\frac{12}{q^2}$$

و أن المنحني Γ يقبل عند النقطة $A(2;11)$ مماسا معامل توجيهه 5.

3. استنتج عبارة $C(q)$.

مسائل

63 **الجزء1:**

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

1.أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. ماذا تستنتج ؟

2.أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3.عين معادلة (Δ) مماس المنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

4. أ- أرسم (Δ) و (C_f).

ب- لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $[0;+\infty[$ بحيث $F(0)=0$. تعيين عبارة $F(x)$ غير مطلوب.

5.فسر وجود الدالة F على المجال $[0;+\infty[$.

6.أدرس اتجاه تغير الدالة F على المجال $[0;+\infty[$.

7.نعتبر الدالتين H و K المعرفتين على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $H(x)=F(x)-x$

و $K(x)=F(x)-\frac{2}{3}x$

- أدرس اتجاه تغير الدالتين H و K على المجال $[0;+\infty[$.
- استنتج أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $F(x)\geq\frac{2}{3}x$. استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$.

8.بين أن المعادلة $F(x)=\pi$ تقبل في المجال $[0;+\infty[$ حلا وحيدا α ثم بين أن $\pi\leq\alpha\leq\frac{3}{2}\pi$.

64 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=x-1+\frac{1}{(x+1)^2}$$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ (أنظر الشكل المقابل).

الجزء الأول:

1.باستعمال المنحني (C) ضع تخمينا حول اتجاه تغير الدالة f على المجال $[1;+\infty[$، ثم أثبت صحة التخمين.

2.استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $[1;+\infty[$. كيف يترجم ذلك على التمثيل البياني المقابل ؟

3.باستعمال المنحني (C) ضع تخمينا حول نهاية f عند0. أثبت صحة التخمين.

4.بين أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

الجزء الثاني:

لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $[1;+\infty[$ بحيث $F(0)=-1$.

1.استنتج من الجزء الأول اتجاه تغير الدالة F على المجال $[1;+\infty[$.

2.عين عبارة $F(x)$ بدلالة x.

3.أدرس نهاية الدالة F عند $+\infty$.

4.شكل جدول تغيرات الدالة F.

5.أرسم في معلم متعامد و متجانس (Γ) التمثيل البياني للدالة F.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

اختبر معلوماتك

اختيار من متعدد

65 لكل الأسئلة التالية ، إجابة واحدة صحيحة، ما هي ؟

1. f هي الدالة المعرفة على $]-\infty;0[$ بـــ:

$$F(x)=\frac{1}{2x}-\frac{3}{x+1}$$

F هي دالة أصلية لدالة f على $]-\infty;0[$

دالة أصلية أخرى G للدالة f على $]-\infty;0[$ معرفة بـــ:

أ) $G:x\mapsto \frac{6x^2+x+1}{2x(x+1)}-x$ ب) $G:x\mapsto \frac{6x^2+x+1}{2x(x+1)}$

جـــ) $G:x\mapsto -\frac{1}{2x}+\frac{3}{x+1}$

2 f دالة معرفة على $]-\infty;-1[$ بـــ:

$$f(x)=2x-1-\frac{1}{(x+1)^2}$$

دالة أصلية F للدالة f على $]-\infty;-1[$ معرفة بـــ:

أ) $F(x)=\frac{x^3+x+1}{(x+1)^2}$ ، ب) $F(x)=\frac{-x+1}{(x+1)^2}$

جـــ) $F(x)=\frac{x^3-x+1}{(x+1)^2}-1$

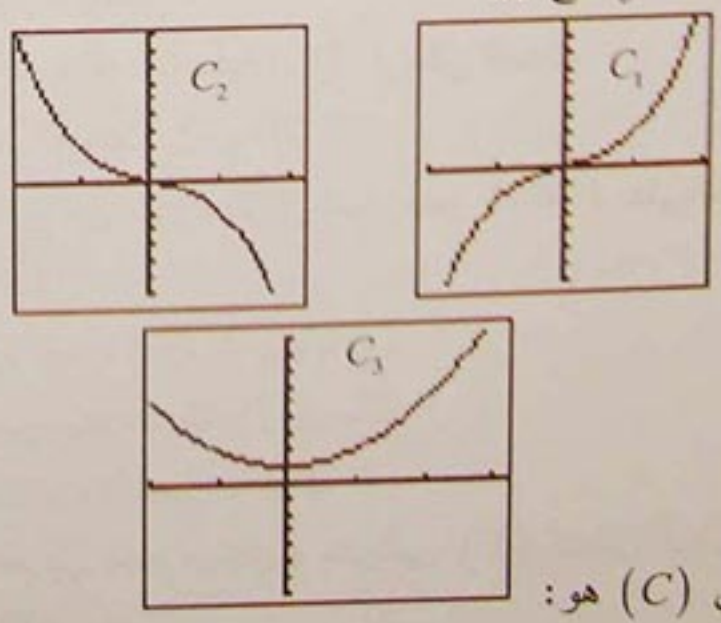
3. f دالة موجبة على مجال D و F دالتها الأصلية على هذا المجال، إذن:

أ) F متزايدة تماما على D ب) F متناقصة تماما على D

جـــ) F ليست رتيبة تماما على D .

4. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـــ $f(x)=-1-x^2$

أحد المنحنيات التالية C_1 ، C_2 و C_3 هو منحنى بياني لدالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$



المنحنى (C) هو:

أ) C_1 ب) C_2 جـــ) C_3

صحيح أم خاطئ

66 اذكر إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة مع تبرير جوابك

1. دالة أصلية على المجال $]-\infty;0[$ للدالة f المعرفة بـ:

$f(x)=\frac{3x^3+2}{2x^2}$ هي الدالة F المعرفة بـ:

$$F(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{x}$$

2. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ حيث إشارة $f(x)$ معطاة بـــ:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

إذا كانت F دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f فإن $F(\alpha)$ قيمة حدية صغرى لـــ F على $\mathbb{R}$.

3. f دالة سالبة تماما على $[1;3]$. إذا كانت F دالة أصلية على $[1;3]$ فإن: $F(2,1)>F(2,2)$.

4. دالتان مختلفتان يمكن أن تكونا دالتين أصليتين لنفس الدالة.

5. الدالتان F و G المعرفتان على $]-\infty;0[$ بـــ

$F(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$ و $G(x)=1+\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}$

أصليتان لنفس الدالة f على المجال $]-\infty;0[$.

6. الدالة f التي دالتها المشتقة f' معرفة بـــ:

$f'(x)=\frac{1}{x^2-1}$ تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}$.

7. f دالة معرفة على $]-\infty;2[$ بـــ: $f(x)=\frac{1}{x-2}$

الدالة f تقبل دالة أصلية F على $]-\infty;0[$ تحقق $F(2)=0$.

8. f دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـــ: $f(x)=\sqrt{x}$

الدالة f تقبل دالة أصلية F متزايدة على $\mathbb{R}^+$.

9. F دالة أصلية لدالة f معرفة و مستمرة على مجال I

إذا كانت f موجبة على مجال $[a;b]$ فإن $F(a)>F(b)$

10. في مؤسسة ، بينت دارسة أن الكلفة الهامشية بالدينار بدلالة الكمية q من الوحدات المصنوعة هي:

$C_m(q)=3q^2-40q+15000$. الكلفة الإجمالية للإنتاج $C(q)$ علما أن الكلف الثابتة تقدر بـــ $100000DA$ هي:

$C(q)=q^3-20q^2+15000q+85000$.

elbassair.net

5 الحساب التكاملي 5

الكفاءات المستهدفة

- حساب تكامل دالة.
- حساب مساحة.
- حساب القيمة المتوسطة لدالة و تفسيرها.

ثابت بن قرة.. إقليدس العرب

ولد ثابت بن قرة (سنة 221 هـ = 834 م) في حران من أرض الجزيرة شمال العراق، بتركيا الآن.

برع ثابت في علم الهندسة حتى قيل عنه إنه أعظم هندسي عربي على الإطلاق، وقال عنه "يورانت ول": إنه أعظم علماء الهندسة المسلمين؛ فقد ساهم بنصيب وافر في تقدم الهندسة، وهو الذي مهد لإيجاد علم التكامل والتفاضل، كما استطاع أن يحل المعادلات الجبرية بالطرق الهندسية، وتمكن من تطوير وتجديد نظرية فيثاغورث، وكانت له بحوث عظيمة وابتكارات رائدة في مجال الهندسة التحليلية؛ فقد ألف كتابا في الجبر، شرح فيه العلاقة بين الجبر والهندسة، وكيفية التوفيق بينهما، واستطاع أن يعطي حلولا هندسية لبعض المعادلات التكعيبية، وهو ما أفاد علماء الغرب فيما بعد في تطبيقاتهم وأبحاثهم الرياضية في القرن السادس عشر.

و يجدر بنا أن نذكر أن ثابت بن قرة مهد لحساب التكامل وذلك عندما وجد حجم الجسم المتولد من دوران القطع المكافئ حول محوره و حين حل معادلة من الدرجة الثالثة بطريقة هندسية و ذلك في كتابه مدخل إلى كتاب إقليدس.



ثابت بن قرة

ومن مؤلفات ثابت الرياضية والهندسية:

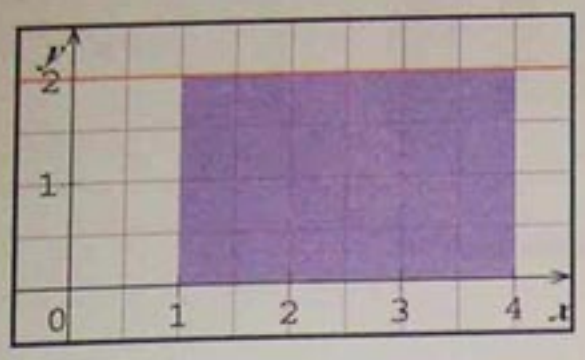
- كتاب في الشكل الملقب بالقطاع.
- كتاب في مساحة الأشكال المسطحة والمجسمة.
- كتاب في قطوع الأسطوانة وبسيطها.
- مساحة المجسمات المكافية.
- قول في تصحيح مسائل الجبر بالبراهين الهندسية.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

النشاط الأول

الجزء الأول



1. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2$.

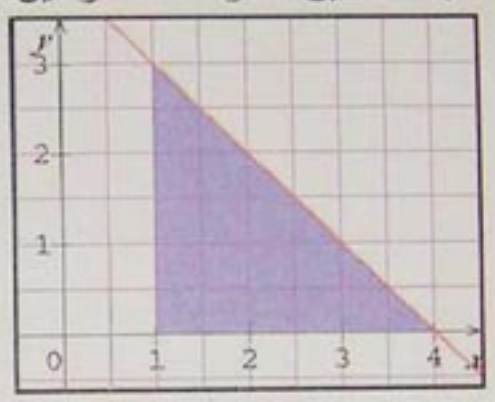
و ليكن (C_g) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

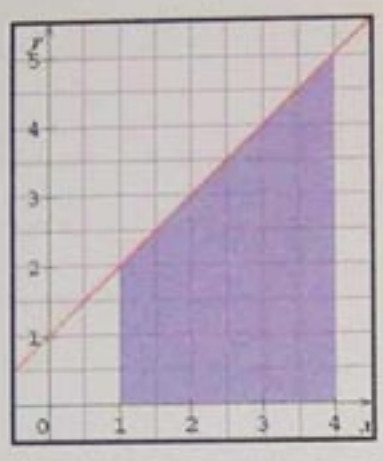
حيث $\|\vec{i}\|=1cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$

نهدف إلى حساب A مساحة الحيز الملون في الشكل المقابل.

- أحسب بـ cm^2 المساحة A.
- عين دالة أصلية G للدالة g على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $G(4)-G(1)$.

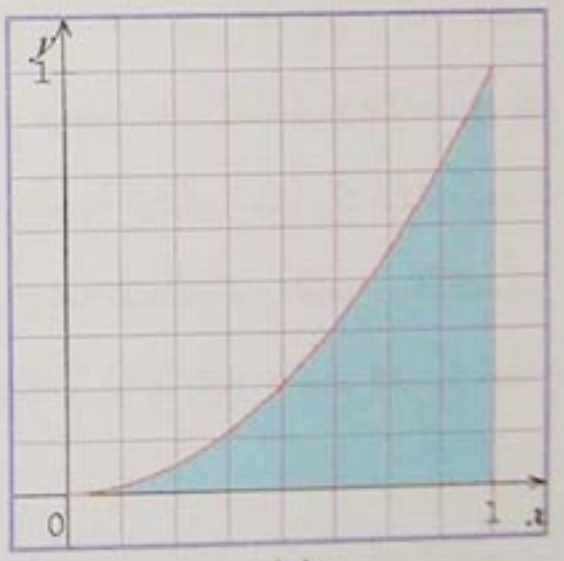
2. نفس الأسئلة بالنسبة للدالتين h و k المعرفتين بـ $h(x)=-x+4$ $k(x)=x+1$ و الممثلتين أسفله.



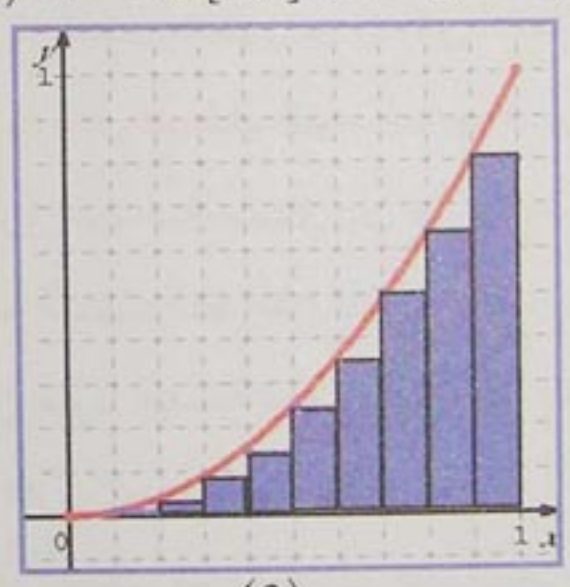


3. ماذا تلاحظ في الحالات الثلاثة ؟ ضع تخمينا.

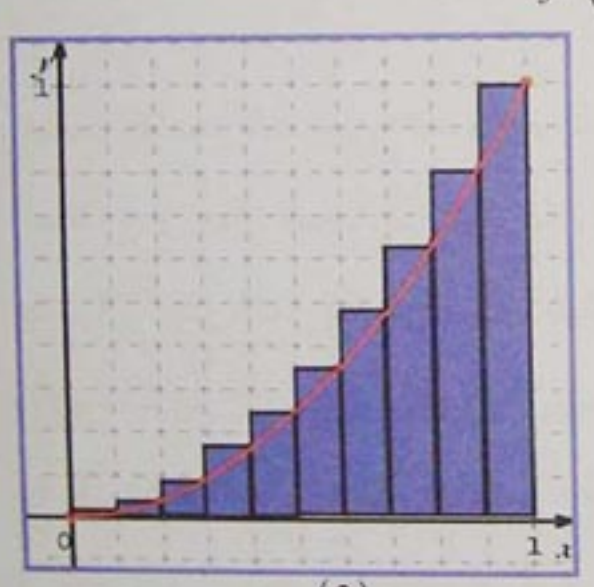
الجزء الثاني: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;1]$ بـ $f(x)=x^2$



(1)



(2)



(3)

1) هل يمكن، باستعمال قاعدة في الهندسة، حساب A_1 مساحة الحيز الملون في الشكل (1) ؟

2) أحسب A_2 مساحة الحيز الملون في الشكل (2) و A_3 مساحة الحيز الملون في الشكل (3).

يمكنك استعمال الجدول التالي:

x	0,1	0,2								
$f(x)$										
المساحة										

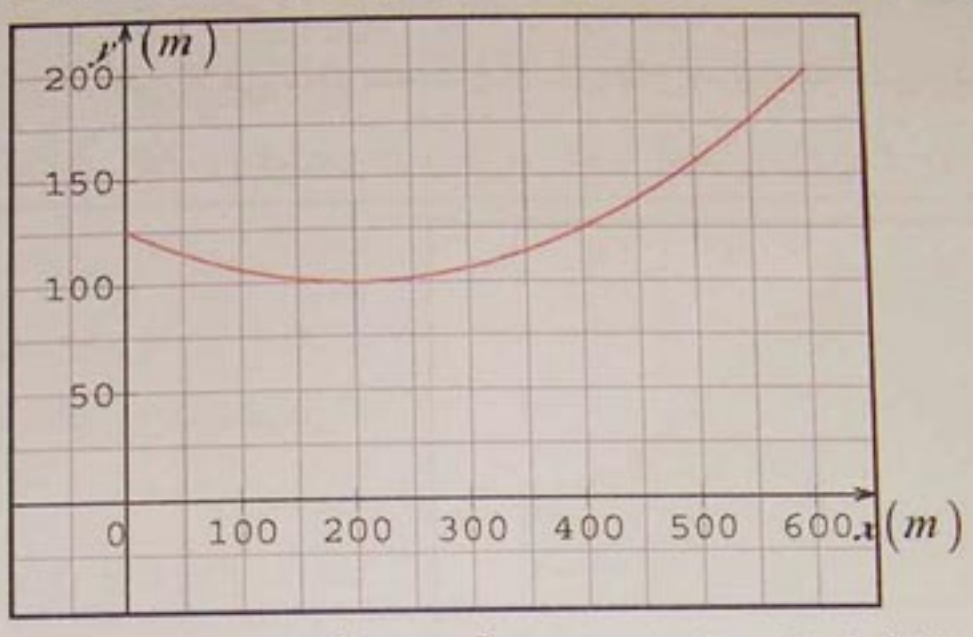
3) استنتج حصرا للمساحة A_1.

4) تحقق ما إن كانت النتيجة المحصل عليها متلائمة مع تخمينك الذي وضعته في السؤال 3 من الجزء الأول.

elbassair.net

النشاط الثاني

نهدف إلى تسوية طريق واقعة على قطعة أرض ملمحها ممثل بالتمثيل البياني (C) الموالي:



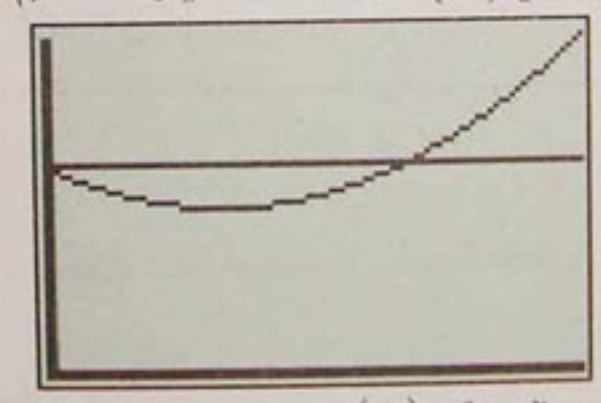
ننمذج هذا الشكل بالدالة f المعرفة على المجال $[0;600]$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2}{1600}-\frac{x}{4}+125$$

بحيث يمثل x فاصلة نقطة من الطريق و يمثل $f(x)$ ارتفاعها بالأمتار.

نريد تسوية هذه الطريق بحيث يكون هنالك توازن بين المحذوف و المضاف من الأتربة مع تحديد ارتفاع الطريق المستوية.

1. عين دالة أصلية للدالة f على المجال $[0;600]$.
2. استنتج A مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) الممثل للدالة f بين العددين 0 و 600.
3. عين " ارتفاع " مستطيل قاعدته $[0;600]$ حيث مساحته هي المساحة A.
4. مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحني (C) الممثل للدالة f و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=125$.



5. عين فواصل نقط المنحني (C) و المستقيم (Δ).
6. تحقق أن: $\int_0^{400}[125-f(x)]dx=\int_{400}^{600}[f(x)-125]dx$

أعط تفسيرا لهذه النتيجة مرتبط بالوضعية المدروسة.

تعريف: نقول أن العدد $\frac{1}{600-0}\int_0^{600}f(x)dx$ هو القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;600]$.

موقع عيون البصائر التعليمي

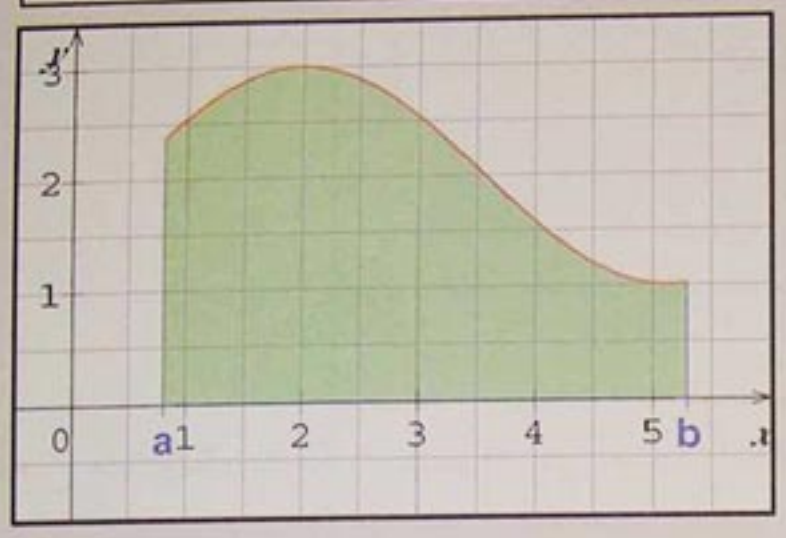
elbassair.net

الدرس

تكامل دالة

1. الدالة الأصلية و مساحة حيز تحت منحن

خاصية (دون برهان): f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحني f في معلم متعامد $(O;A,B)$ و F دالة أصلية لـ f على I.
مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$.



ملاحظات:

1. الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو الحيز المحدد بالمنحني (C_f)، محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$.
2. وحدة المساحة هي مساحة المستطيل $OAKB$ حيث K هي النقطة التي إحداثياها $(1;1)$.

2. تعريف التكامل

f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I. إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I فإنه يوجد عدد حقيقي k بحيث من أجل كل x من I، $G(x)=F(x)+k$.

لدينا: $G(b)-G(a)=\left[F(b)+k\right]-\left[F(a)+k\right]=F(b)-F(a)$

نلاحظ هكذا أن العدد $F(b)-F(a)$ مستقل عن اختيار الدالة الأصلية للدالة f على المجال I.

تعريف: f دالة مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I.
يسمى العدد الحقيقي $F(b)-F(a)$، حيث F دالة أصلية لـ f على I، التكامل من a إلى b لـ f و نرمز إليه بالرمز $\int_a^b f(x)dx$.

ملاحظات:

1. عمليا لحساب العدد $\int_a^b f(x)dx$ نقوم بتعيين دالة أصلية F للدالة f على مجال I يشمل العددين a و b ثم نكتب:

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

2. يمكن تبديل المتغير x بأحد الحروف t، q،... فيكون لدينا مثلا $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$

نتيجة: f دالة مستمرة و موجبة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$. (C_f) منحني f في معلم متعامد $(O;A,B)$ و F دالة أصلية لـ f على I.
مساحة الحيز تحت المنحني (C_f) بين العددين a و b هو العدد الحقيقي $\int_a^b f(x)dx$

elbassair.net

تمرين محلول1: أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_0^1 (x^2+1)dx$ 2) $\int_{-1}^1 (x^3-x)dx$ 3) $\int_{-3}^2 x\,dx$

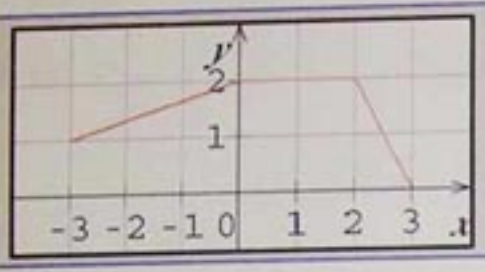
الحل:

1) $\int_0^1 (x^2+1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{3}+1\right)-0 = \frac{4}{3}$

2) $\int_{-1}^1 (x^3-x)dx = \left[\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = 0$

3) $\int_{-3}^2 2x\,dx = \left[x^2\right]_{-3}^2 = (2)^2-(-3)^2 = 4-9 = -5$

تمرين محلول2: التمثيل البياني المقابل هو لدالة f .



أحسب التكاملات التالية: 1) $\int_{-3}^2 f(x)dx$ 2) $\int_{-3}^3 f(x)dx$ 3) $\int_0^3 f(x)dx$

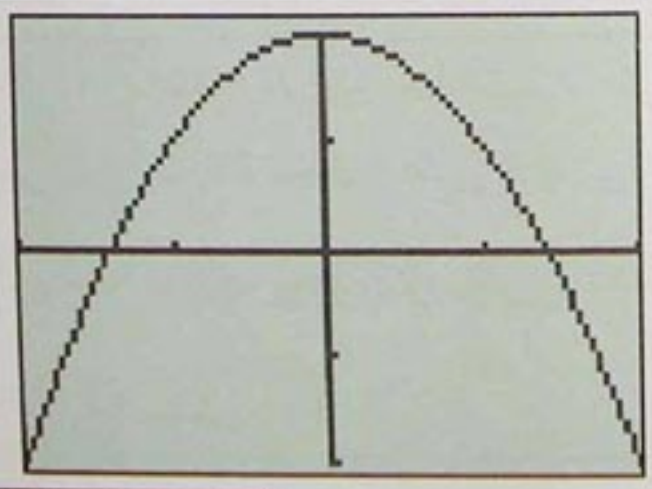
الحل: نلاحظ أن الدالة f موجبة على المجال $[-3;3]$.

1) $\int_{-3}^2 f(x)dx = 3\times\frac{1+2}{2}+4 = \frac{17}{2}$ 2) $\int_{-3}^3 f(x)dx = \frac{17}{2}+\frac{1\times 2}{2} = \frac{19}{2}$ 3) $\int_0^3 f(x)dx = 2\times 2+\frac{1\times 2}{2} = 5$

تمرين محلول3: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2-x^2$

1. مثل عل شاشة حاسبة بيانية الدالة f.
2. أحسب بوحدة المساحة $(u.a)$ مساحة الحيز تحت المنحني بين العددين -1 و 1.
3. المعلم الذي مثلت فيه الدالة f متعامد حيث الوحدات كما يلي: $2cm$ على محور الفواصل و $1,5cm$ على محور التراتيب.أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز تحت المنحني بين العددين -1 و 1.

الحل:



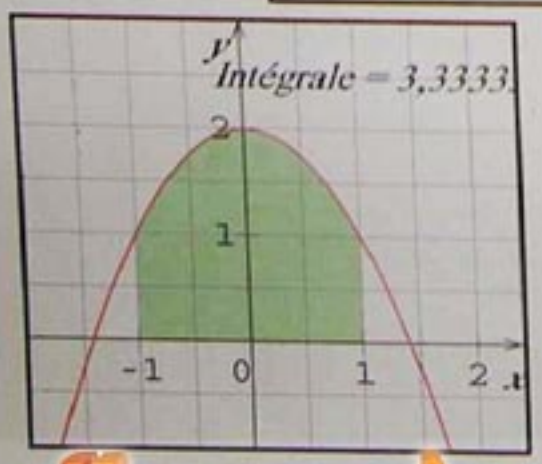
```
WINDOW
 Xmin=-2
 Xmax=2
 Xscl=1
 Ymin=-2
 Ymax=2
 Yscl=1
 Xres=1
```

1. أنظر الشكل المقابل.
2. الدالة f موجبة على المجال $[-1;1]$ و دالة أصلية لها على $[-1;1]$ هي الدالة F حيث: $F(x) = 2x-\frac{1}{3}x^3$

مساحة الحيز، بوحدة المساحة، تحت المنحني بين العددين -1 و 1 هي:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \left[2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \left(2-\frac{1}{3}\right)-\left(-2+\frac{1}{3}\right) = \frac{10}{3}(u.a)$$

3. وحدة المساحة هي $2cm\times 1,5cm$ أي $3cm^2$ و بالتالي فإن مساحة الحيز، بـ cm^2، تحت المنحني بين العددين -1 و 1 هي: $\frac{10}{3}\times 3cm^2$ أي $10cm^2$



elbassair.net

ـ خواص التكامل

f و g دالتان معرفتان و مستمرتان على مجال I.

1. الخطية

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من I و من أجل كل عدد حقيقي k لدينا:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad (1)$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad (2)$$

البرهان: العلاقة (1): نعلم أنه إذا كانت F و G دالتين أصليتين على الترتيب للدالتين f و g على المجال I فإن الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على المجال I. و منه:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = [F(x)+G(x)]_a^b = [F(b)+G(b)]-[F(a)+G(a)]$$

$$= [F(b)-F(a)]+[G(b)-G(a)] = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

العلاقة (2): نتبع منهجية مماثلة علما أنه إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن kF دالة أصلية لـ kf على I.

2. الترتيب

خواص: a و b عددان حقيقيان من I حيث $a \leq b$.

(1) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x) \geq 0$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

(2) إذا كان من أجل كل x من $[a;b]$، $f(x) \leq g(x)$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

البرهان: العلاقة (1): إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن من أجل كل x من I، $F'(x)=f(x)$. و بما أن $f(x) \geq 0$ على $[a;b]$ فإن F متزايدة على $[a;b]$ و بالتالي $F(a) \leq F(b)$ أي $F(b)-F(a) \geq 0$ و منه $\int_a^b f(x)dx \geq 0$. بالنسبة لبرهان العلاقة (2) يكفي أن نلاحظ أن $g(x)-f(x) \geq 0$ و نطبق النتائج السابقة.

3. علاقة شال

خواص: من أجل كل أعداد حقيقية a، b و c من I لدينا:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

البرهان: إذا كانت F دالة أصلية لـ f على I فإن:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = [F(b)-F(a)]+[F(c)-F(b)] = [F(c)-F(a)] = \int_a^c f(x)dx$$

elbassair.net

تمرين محلول1: f و g دالتان مستمرتان على المجال $[1;3]$ حيث: $\int_1^3 f(x)dx = 2$ و $\int_1^3 g(x)dx = -5$.

أحسب التكاملات التالية: أ) $\int_1^3 [f(x)+g(x)]dx$ ، ب) $\int_1^3 5f(x)dx$ ، جـ) $\int_1^3 [2f(x)-3g(x)]dx$

الحل: أ) $\int_1^3 [f(x)+g(x)]dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_1^3 g(x)dx = 2-5=-3$.

ب) $\int_1^3 5f(x)dx = 5\int_1^3 f(x)dx = 5\times 2 = 10$.

جـ) $\int_1^3 [2f(x)-3g(x)]dx = 2\int_1^3 f(x)dx - 3\int_1^3 g(x)dx = 2(2)-3(-5)=19$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

بين أنه من أجل كل x من $[0;1]$، $f(x)\le 1$. استنتج أن $\int_0^1 f(x)dx \le 1$

الحل: من أجل كل x من $[0;1]$، $1+x^2 \ge 1$ و منه من أجل كل x من $[0;1]$، $\frac{1}{1+x^2} \le 1$.

نستنتج أن $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \le \int_0^1 1dx$ و بما أن $\int_0^1 1dx = [x]_0^1 = 1$ فإن $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \le 1$.

تمرين محلول3: f دالة معرفة على $[-1;2]$ بـ $f(x)=\begin{cases} x^2 & ,x\in[-1;1] \\ 2x-1 & ,x\in[1;2] \end{cases}$. أحسب $\int_{-1}^2 f(x)dx$.

الحل: $\int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_{-1}^1 x^2dx + \int_1^2 (2x-1)dx$

لدينا: $\int_{-1}^1 x^2dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}$ و $\int_1^2 (2x-1)dx = \left[x^2-x\right]_1^2 = 2-0=2$

و منه $\int_{-1}^2 f(x)dx = \frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$.

تمرين محلول4: f دالة مستمرة على مجال I. a ، b عددان حقيقيان من I. بين أن:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad (1) \quad ، \quad \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad (2)$$

الحل: لتكن F دالة أصلية للدالة f على I.

(1): $\int_a^a f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^a = F(a)-F(a)=0$

(2): $\int_a^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx = \int_a^a f(x)dx = 0$ و منه $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

ـ القيمة المتوسطة – الدالة الأصلية التي تنعدم من أجل قيمة

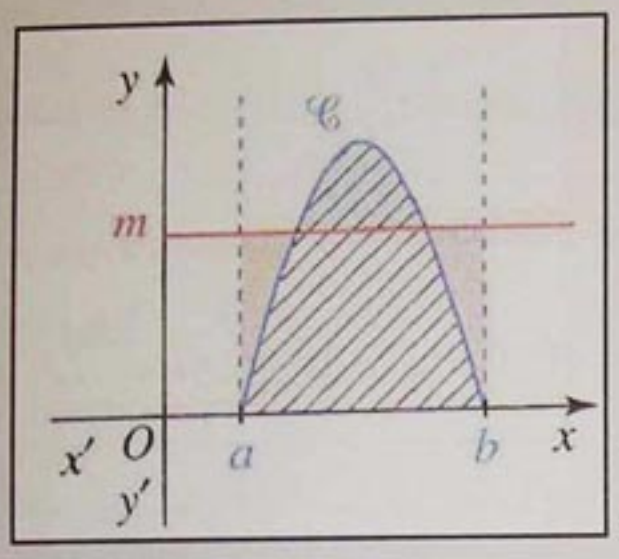
1. القيمة المتوسطة لدالة على مجال

تعريف: f دالة معرفة و مستمرة على مجال I. a و b عددان حقيقيان من I حيث $a<b$.

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a;b]$ هي العدد الحقيقي:

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

التفسير البياني: نفرض أن الدالة f موجبة على المجال $[a;b]$.



ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;I,J)$.

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad \text{يعني} \quad m(b-a)=\int_a^b f(x)dx$$

نعلم أن $\int_a^b f(x)dx$ هو مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b.

$m(b-a)$ هي مساحة المستطيل الذي بعداه $b-a$ و m (القيمة المتوسطة).

و هكذا فإن m، القيمة المتوسطة لـ f على $[a;b]$، هي " ارتفاع " المستطيل الذي قاعدته $b-a$ و الذي له نفس مساحة الحيز الواقع تحت المنحني (C) بين a و b.

نلاحظ أن للحيزين الملونين بالأزرق و الأحمر نفس المساحة.

ملاحظة (القيمة المتوسطة و الوحدات): إذا كان x و y مقدارين مرتبطين بعلاقة من الشكل $y=f(x)$ فإن التكامل $\int_a^b f(x)dx$ مقدار متجانس مع الجداء xy للمقدارين x و y. و بما أن المقدار $(b-a)$ متجانس مع x فإن القيمة المتوسطة $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ متجانسة مع $\frac{1}{x}xy$ أي مع y.

2. الدالة الأصلية لدالة و التي تنعدم من أجل قيمة

تعريف: f دالة مستمرة على مجال I و a عدد حقيقي من I.

الدالة الأصلية الوحيدة للدالة f على I و التي تنعدم من أجل a هي الدالة $F: x\mapsto \int_a^x f(t)dt$

مثال: لتكن f الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$.

الدالة الأصلية للدالة f و التي تنعدم من أجل القيمة 1 هي الدالة F حيث: $F(x)=\int_1^x\left[t^2+\frac{1}{t^2}\right]dt$

لدينا: $F(x)=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{1}{t}\right]_1^x=\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)$ و بالتالي: $F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{x}+\frac{2}{3}$

elbassair.net

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x-1$

أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;2]$.

الحل: القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;2]$ هي العدد الحقيقي m حيث:

$$m=\frac{1}{2-1}\int_1^2(2x-1)dx=\left[x^2-x\right]_1^2=(4-2)-(1-1)=2$$

تمرين محلول2: ورشة تصنع أدوات يتم تجميعها وفق مجموعات تضم مائة أداة. يتراوح الإنتاج اليومي للورشة بين 100 و 800 أداة. نفرض أن الربح بآلاف الدنانير، بدلالة الكمية المنتجة q هو:

$$f(q)=2q-1+\frac{1}{q^2} \quad \text{حيث} \quad 1\le q\le 8$$

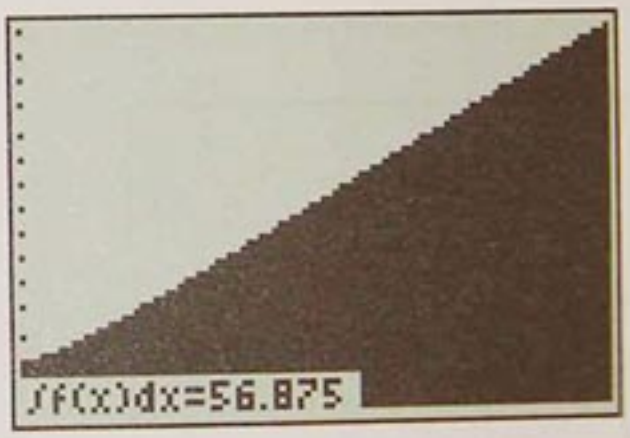
1. عين دالة أصلية F للدالة f على المجال $[1;8]$.
2. مثل هذه الدالة على شاشة حاسبة بيانية.
3. أحسب بـ DA الربح المتوسط B_m المحقق من أجل كل مجموعة 100 أداة.

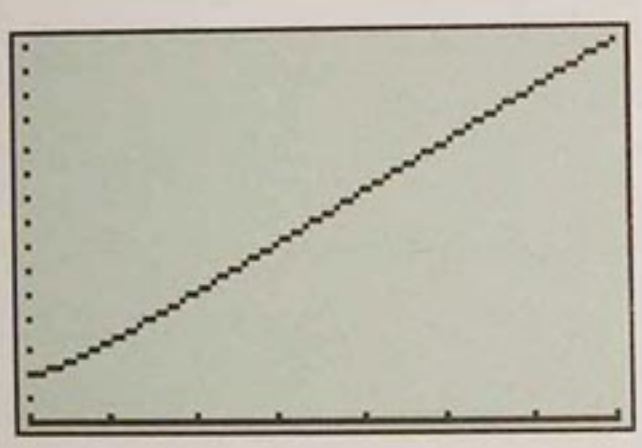
الحل:

1. الدالة f مستمرة على $]0;+\infty[$ و منه على $[1;8]$. دالة أصلية للدالة f على $[1;8]$ هي الدالة F حيث:

$$F(q)=q^2-q-\frac{1}{q}$$

2.





3. B_m هو القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;8]$. و منه:

$$B_m=\frac{1}{8-1}\int_1^8 f(q)dq=\frac{1}{7}\left[q^2-2q-\frac{1}{q}\right]_1^8=8,125$$

و من فالربح المتوسط المحقق من أجل 100 أداة هو حوالي $8125\,DA$.

تمرين محلول3: نعتبر الدالة F المعرفة كما يلي: $F(t)=\int_0^x\sqrt{t^4+1}\,dt$

عين مجموعة تعريف الدالة F ثم أدرس اتجاه تغيرها.

الحل:

الدالة F هي الدالة الأصلية للدالة $t\mapsto\sqrt{t^4+1}$ و التي تنعدم من أجل القيم 0 للمتغير. فهي إذن معرفة على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F'(x)=\sqrt{x^4+1}$. بما أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $F'(x)>0$ فإن الدالة F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

elbassair.net

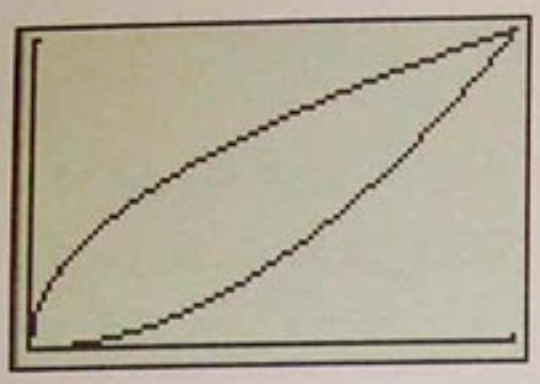
موقع عيون البصائر التعليمي

مساحة حيز محدد بمنحنيين

نعتبر دالتين f و g مستمرتين على مجال $[a;b]$ و ليكن (C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين في معلم متعامد $(O;I,J)$.

نهدف إلى حساب مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما على الترتيب $x=a$ و $x=b$.

1. المثال الأول



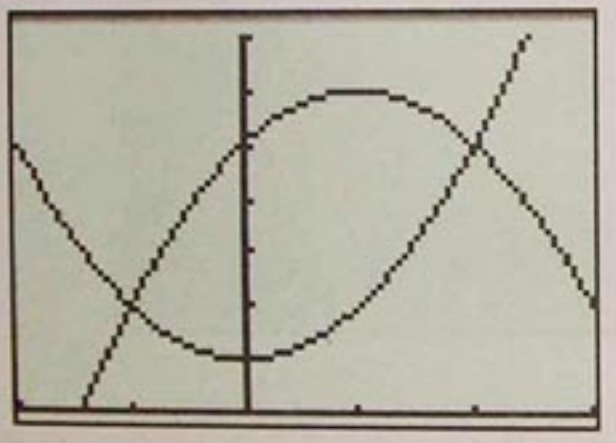
نعتبر دالتين f و g المعرفتين على المجال $[0;1]$ كما يلي:

$$f(x)=\sqrt{x} \quad \text{و} \quad g(x)=x^2$$

- مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحنيين (C_f) و (C_g).
- برهن أنه من أجل كل x من $[0;1]$، $f(x)\geq g(x)$
- تحقق أن الدالة $x\mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ دالة أصلية للدالة f على $[0;1[$.
- نسمي A_1 مساحة الحيز تحت (C_f) و A_2 مساحة الحيز تحت (C_g) بين العددين 0 و1 و لتكن A مساحة (D).

عبر عن A بدلالة A_1 و A_2. استنتج أن $A=\int_0^1 [f(x)-g(x)]dx$ ثم أحسب A بوحدة المساحة.

2. المثال الثاني

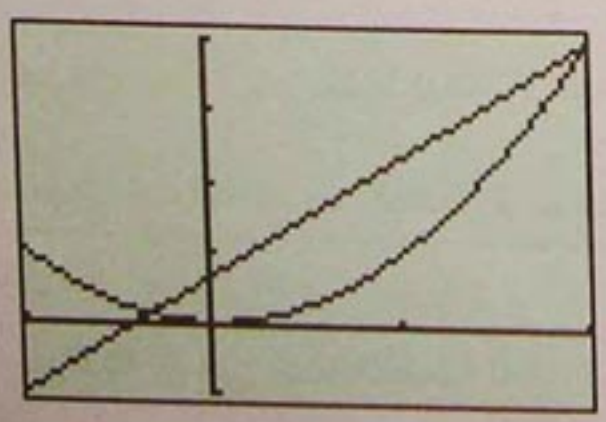


نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=x^2+1 \quad \text{و} \quad g(x)=-x^2+2x+5$$

- مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحنيين (C_f) و (C_g).
- عين نقطتي تقاطع المنحنيين (C_f) و (C_g).
- برهن أنه من أجل كل x من $[-1;2]$، $f(x)\leq g(x)$
- أحسب مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f)، (C_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما على الترتيب $x=-1$ و $x=2$.

3. المثال الثالث



نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $[-1;2]$ كما يلي:

$$f(x)=x^2 \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}$$

- مثل على شاشة حاسبة بيانية المنحنيين (C_f) و (C_g).
- أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C_f) و (C_g) على $[-1;2]$
- أحسب مساحة الحيز (D) المحدد بالمنحنيين (C_f)، (C_g) و بالمستقيمين اللذين معادلتاهما على الترتيب $x=-1$ و $x=2$.

elbassair.net

حصر تكامل

نهدف إلى تعيين حصر للعدد الحقيقي $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ الذي لا نعرف حساب قيمته المضبوطة لأنه على مستوانا لا نعرف تعيين دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

نعتبر الدالة φ المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(x)=\frac{1}{1+x^2}$

1. نعتبر الدالتين f_1 و f_2 المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f_1(x)=-\frac{1}{2}x+1$ و $f_2(x)=-\frac{1}{2}x^2+1$

a. أدرس على $\mathbb{R}$ إشارة الفرق: $\varphi(x)-f_1(x)$.

استنتج أنه من أجل كل x من $[0;1]$، $f_1(x)\le\varphi(x)$

b. أدرس على $\mathbb{R}$ إشارة الفرق: $\varphi(x)-f_2(x)$

استنتج أنه من أجل كل x من $[0;1]$، $\varphi(x)\le f_2(x)$

c. استنتج حصرا للتكامل $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.

2. نعتبر الدالتين g_1 و g_2 المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$g_1(x)=1-x^2$ و $g_2(x)=1-x^2+\frac{x^3}{2}$

d. أدرس على $\mathbb{R}$ إشارة الفرق: $\varphi(x)-g_1(x)$.

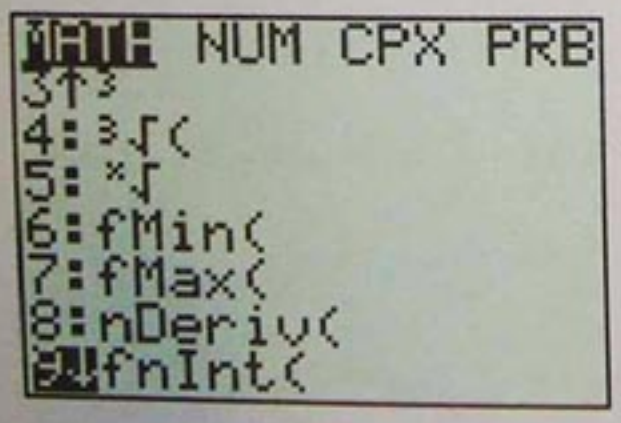
استنتج أنه من أجل كل x من $[0;1]$، $g_1(x)\le\varphi(x)$

e. تحقق انه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g_2(x)-\varphi(x)=\frac{x^3(x-1)^2}{2(x^2+1)}$

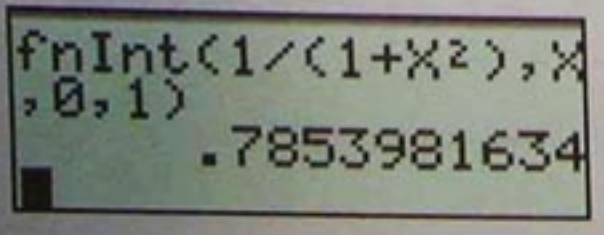
استنتج أنه من أجل كل x من $[0;1]$، $\varphi(x)\le g_2(x)$

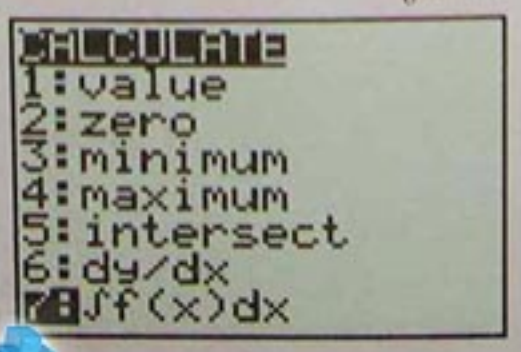
f. استنتج حصرا للتكامل $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.

3. استنتج من السؤالين 1 و2 أحسن حصر للتكامل $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.



4. باستعمال حاسب بيانية أحسب $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$. ثم قارن النتيجة المحصل عليها مع نتيجة السؤال 3.







elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

موضوع محلول

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث:

$$f(x)=\frac{2x^3+3x^2+4}{x^2}$$

نرمز بـ (C) إلى التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x^2}$

2. احسب المساحة $S(\lambda)$ للحيز المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=1$ و $x=\lambda$ حيث λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1.

بكالوريا

حـــل

1. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x : $f(x)=ax+b+\frac{c}{x^2}$

$$f(x)=\frac{2x^3+3x^2+4}{x^2}=\frac{2x^3}{x^2}+\frac{3x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}=2x+3+\frac{4}{x^2}$$

إذن: $(a;b;c)=(2;3;4)$

2. حساب المساحة $S(\lambda)$:

$$S(\lambda)=\int_1^{\lambda} f(x)\,dx=\int_1^{\lambda}\left(2x+3+\frac{4}{x^2}\right)dx$$

$$=\left[x^2+3x-\frac{4}{x}\right]_1^{\lambda}$$

$$=\left[\lambda^2+3\lambda-\frac{4}{\lambda}\right]-\left[1^2+3-\frac{4}{1}\right]$$

$$=\left(\lambda^2+3\lambda-\frac{4}{\lambda}\right)u.a$$

- تعيين λ حتى يكون $S(\lambda)=\lambda^2$:

$S(\lambda)=\lambda^2$ معناه $\lambda^2+3\lambda-\frac{4}{\lambda}=\lambda^2$

أي $3\lambda=\frac{4}{\lambda}$

أي $\lambda^2=\frac{4}{3}$

و بالتالي $\left(\lambda=-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ أو $\left(\lambda=\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

إذن: $\lambda=\frac{2}{\sqrt{3}}$ لأن λ عدد حقيقي أكبر تماما من 1

تعاليق

- يمكن كتابة $f(x)$ بعد توحيد المقامات على الشكل : $f(x)=\frac{ax^3+bx^2+c}{x^2}$ ثم نساوي هذه العبارة مع العبارة $\frac{2x^3+3x^2+4}{x^2}$

- لحساب المساحة نطبق خواص التكامل.

- $\int_a^b bf(x)dx=F(b)-F(a)$ حيث F دالة أصلية للدالة f

- المعادلة $x^2=\alpha$ حيث $\alpha>0$ تقبل حلين متناظرين $-\sqrt{\alpha}$ و $\sqrt{\alpha}$

elbassair.net

موضوع مع إرشادات

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـــ: $f(x)=\dfrac{-x^3-2x^2-x-4}{(x+1)^2}$

1. عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1: $f(x)=ax+\dfrac{b}{(x+1)^2}$

2.أ- احسب نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

ب- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$: $f'(x)=\dfrac{-(x-1)(x^2+4x+7)}{(x+1)^3}$

ج- ادرس إشارة $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات f

3. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α حيث $-2,5<\alpha<-2$

4. بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=-x$ مقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

5. أرسم D و المنحنى (C) الممثل للدالة f في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$، الوحدة: $2cm$ على محور الفواصل و $1cm$ على محور التراتيب.

6. أ- احسب ، بوحدة المساحات ، المساحة $S(\alpha)$ لحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) ، المستقيم D الذين معادلتاهما $x=-2$ و $x=\alpha$.

ب- تحقق من النقطتين $A(-3;2)$ و $B(-2;-2)$ تنتميان إلى المنحنى (C).

ج- احسب بـــ cm^2 المساحة S لحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و القطعة $[AB]$.

إرشادات

تعيين a و b يستوجب توحيد المقامات ، ثم تطبيق تساوي كثيرات الحدود أو إجراء عملية القسمة الاقليدية.

2. أ- طبق العمليات على النهايات.

ب- طبق العمليات على المشتقات و لاحظ أن $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

ج- لاحظ أن إشارة $f'(x)$ تتعلق بإشارة البسط و المقام معاً.

3. استعمل مبرهنة القيم المتوسطة.

4. احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(-x)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(-x)]$

5. الدقة ضرورية في رسم المنحنى (لاحظ أن المنحنى (C) أسفل المستقيم D).

6. أ- حساب المساحة يتطلب معرفة الوضعية النسبية للمنحنى (C) و المستقيم D .

ج- أولا جد معادلة المستقيم (AB)، ثم لاحظ أن حدود المكاملة هما فاصلتي A و B على الترتيب.

تذكر دائما أن وحدة المساحة تساوي $\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

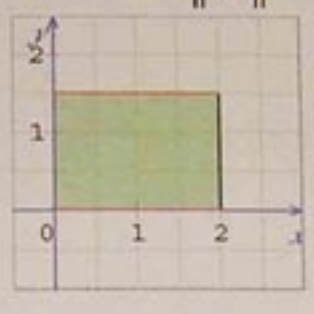
تمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ تكامل دالة

1 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\frac{3}{2}$.

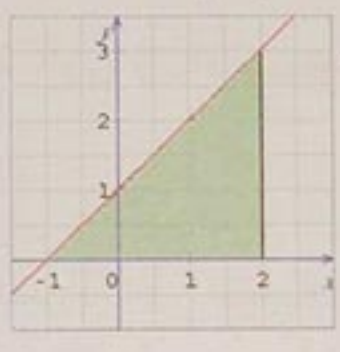
و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$



- أحسب بـ cm^2 المساحة A للحيز الملون في الشكل المقابل
- عين دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $F(2)-F(0)$.

2 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x-1$.

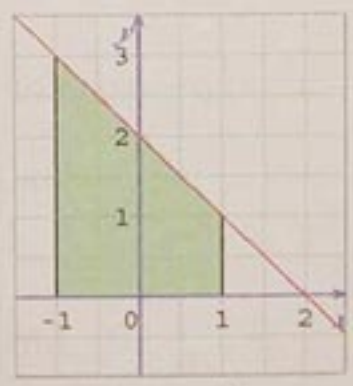
و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$



- أحسب بـ cm^2 المساحة A للحيز الملون في الشكل المقابل
- عين دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $F(2)-F(-1)$.

3 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2-x$.

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=1cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$



- أحسب بـ cm^2 المساحة A للحيز الملون في الشكل المقابل
- عين دالة أصلية F للدالة f على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $F(1)-F(-1)$

4 أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_0^3 (2x+3)\,dx$ 2) $\int_{-2}^{1} x^2\,dx$

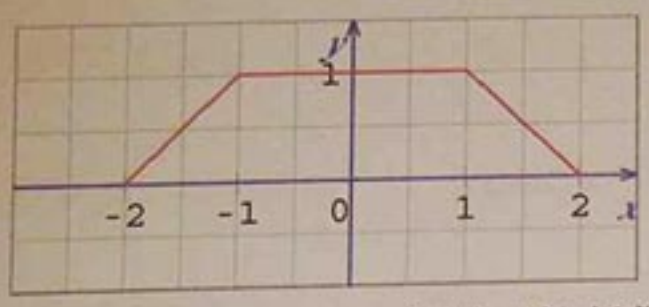
3) $\int_{-5}^{5} (4-x)\,dx$ 4) $\int_0^2 (1-x^2)\,dx$

5 أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_1^2 (x^2+x-2)\,dx$ 2) $\int_{-1}^{0} (-3x^2+2x)\,dx$

3) $\int_{-2}^{2} -x^3\,dx$ 4) $\int_1^3 (x^3+2x+2)\,dx$

8 التمثيل البياني التالي هو لدالة f معرفة على $[-2;2]$ في معلم متعامد ومتجانس.



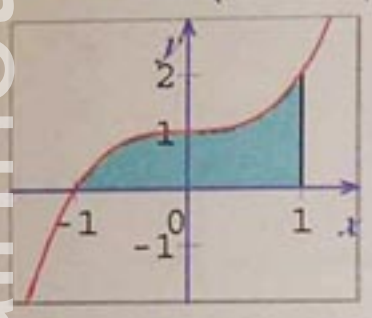
أحسب التكاملات التالية:

1) $\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx$ 2) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$

3) $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$ 4) $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$

9 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^3+1$.

و (C) هو تمثيلها البياني في معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ في الشكل المقابل



1. عين إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.
2. احسب بوحدة المساحة $(u.a)$ مساحة الحيز تحت المنحني بين العددين -1 و 1.
3. احسب بـ cm^2 هذه المساحة إذا علمت أن: $\|\vec{i}\|=1cm$ و $\|\vec{j}\|=0,5cm$.

10 احسب التكاملات التالية:

1) $\int_1^2 \left(x-\frac{1}{x^2}\right)dx$ 2) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(2t-1+\frac{1}{t^2}\right)dt$

3) $\int_0^2 (0,01x^2-x)\,dx$ 4) $\int_1^2 (x+1)^3\,dx$

11 احسب التكاملات التالية:

1) $\int_1^2 \left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)dx$ 2) $\int_{-2}^{-1} \left(\frac{1-t^3+t^4}{t^2}\right)dt$

3) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)^3}\,dx$ 4) $\int_0^1 \frac{-2}{(x-2)^3}\,dx$

12 احسب التكاملات التالية:

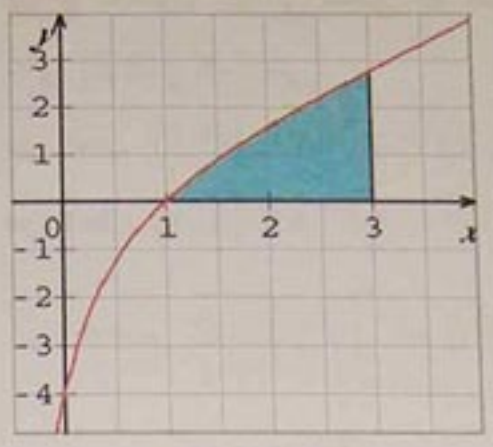
1) $\int_0^1 (x-1)^4\,dx$ 2) $\int_1^2 2x(x^2-1)\,dt$

3) $\int_0^1 x^2(x^3+2)\,dx$ 4) $\int_3^4 \frac{x}{(x^2-2)^3}\,dx$

elbassair.net

13 لتكن الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$f(x)=x-\dfrac{4}{(x+1)^2}$ و C_f تمثيلها البياني في الشكل المقابل.

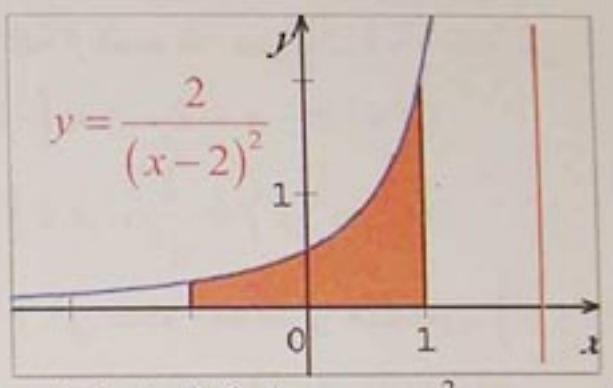


1. احسب $\int_1^3 f(x)\,dx$

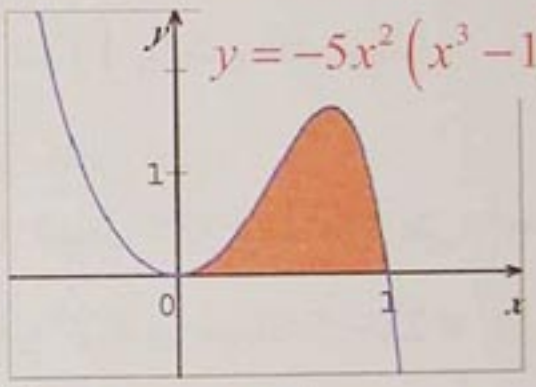
2. فسر بيانيا هذه النتيجة.

3. احسب $\int_0^3 f(x)\,dx$

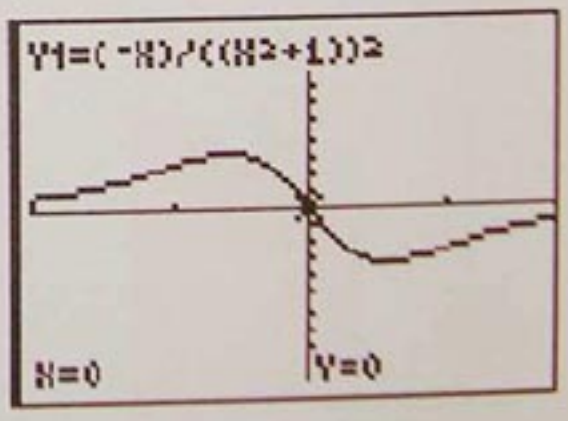
14 احسب بـ cm^2 ، مساحة الحيز الملون التالي:



15 احسب بـ cm^2 ، مساحة الحيز الملون التالي:



16 المنحنى المرسوم (C) معادلته $y=\dfrac{-x}{(x^2+1)^2}$



1. عين المساحة A_1 لحيز المستوي المحدد بالمنحنى، محور الفواصل و المستقيم D الذي معادلته $x=1$.

2. أ-اكتب معادلة المماس T للمنحنى (C) عند المبدأ.

ب- حدّد وضعية (C) بالنسبة إلى T .

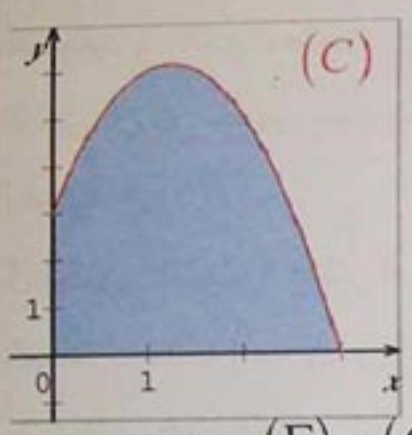
ج- احسب المساحة A_2 للمثلث المحدد بـ T ، محور الفواصل و المستقيم D (مقدرة بوحدة المساحات)

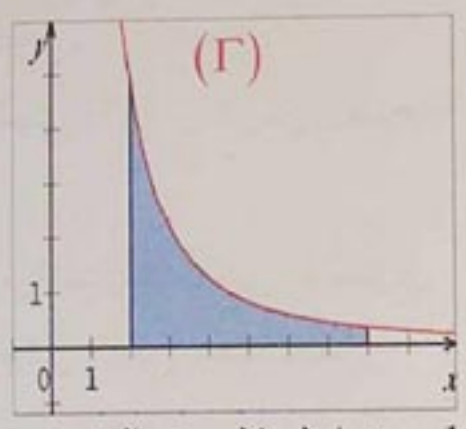
3. استنتج المساحة A لحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) ، المماس T و المستقيم D (مقدرة بوحدة المساحات).

4. أ- احسب $I(\lambda)=\int_0^{\lambda}\dfrac{-x}{(x^2+1)}\,dx$ حيث λ عدد حقيقي موجب تماما.

ب- عين نهاية $I(\lambda)$ عندما يؤول λ إلى $+\infty$.فسر بيانيا هذه النتيجة.

17 في الشكلين المواليين المنحنى (C) معادلته $y=-2x^2+5x+3$ و المنحنى (Γ) معادلته $y=\dfrac{20}{x^2}$.





1. من اجل كل من المنحنيين (C) و (Γ) ، عين باستعمال جمل متراجحات ، مجموعة النقط $M(x;y)$ لمستوي الحيز الملون بالأزرق.

2. احسب مساحة هذين الحيزين.

18 نعتبر الدالة f المعرفة على $[2;4]$ كما يلي:

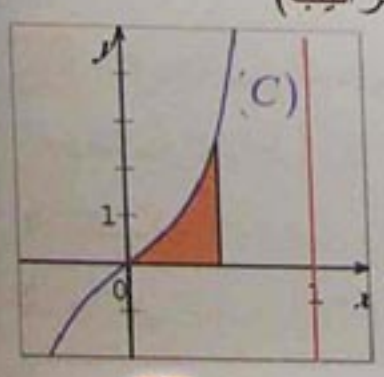
$f(x)=\dfrac{-2x-1}{x^2+x-2}$.

1. بين أن f معرفة جيدا على المجال $[2;4]$.

2. احسب $\int_2^4 f(x)\,dx$

19 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;1]$ كما يلي:

$f(x)=\dfrac{3x}{(x^2-1)^2}$. (C) هو المنحنى البياني الممثل لها في معلم متعامد (الوحدة $2cm$ على محور الفواصل ، $0,5cm$ على محور التراتيب)



1. بين أن f معرفة جيدا على المجال $[-1;1]$.

2. احسب مساحة الحيز تحت المنحنى (مقدرة بوحدة المساحات).

2. احسب المساحة السابقة بـ cm^2

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

2 - خواص التكامل

20 f و g دالتان عدديتان لمتغير حقيقي x حيث:

$\int_0^2 f(x)\,dx = 3$ و $\int_0^2 g(x)\,dx = -2$

احسب $\int_0^2 [2f(x) - 3g(x)]\,dx$

21 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x + 1 + \frac{6}{x^2}$$

(C) هو المنحنى البياني الممثل لها في معلم .

1. على شاشة الآلة الحاسبة البيانية ، ارسم (C) و المستقيم Δ الذي معادلته $y = x + 1$.

2. بين أن Δ مستقيم مقارب للمنحنى (C) و ادرس وضعيته بالنسبة إلى (C) .

3. احسب المساحة (مقدرة بوحدة المساحات) لحيز المستوي المحدد بـ (C) و Δ و المستقيمين اللذين معادلتاهما: $x = 1$ و $x = 6$.

22 عين بدون حساب إشارة كل من التكاملات التالية:

1) $\int_{-3}^{-2} x^2\,dx = 3$ 2) $\int_{-1}^{1} (1 - x^2)\,dx = 3$

3) $\int_{-6}^{1} (x^2 - 2x + 3)\,dx = 3$ 4) $\int_{-5}^{1} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 1}\,dx = 3$

23 f دالة معرفة على $[0;4]$ حيث :

من أجل كل x من $[0;4]$: $x^2 \le f(x) \le x^2 + x$

عين حصرا للتكامل $\int_0^4 f(x)\,dx$

24 f دالة معرفة على $[1;+\infty[$ حيث :

من أجل كل x من $[1;+\infty[$: $\frac{1}{\sqrt{x}} \le f(x) \le 1$

عين حصرا للتكامل $\int_1^3 f(x)\,dx$

25 f دالة معرفة على $[-3.3]$ كما يلي

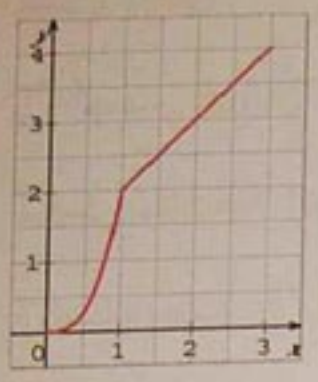
f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = |x^2 - 4|$

1. اكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة.

2. ما هي إشارة $f(x)$ على المجال $[3;3]$.

3. احسب $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$

26 التمثيل البياني لتالي هو لدالة f معرفة مستمرة على $[0;3]$ كما يلي:



من أجل $x \in [0;1]$ ، $f(x) = x^3$

من أجل $x \in [1;3]$ ، $f(x) = x + 1$

1. احسب $\int_0^1 f(x)\,dx$ ثم $\int_1^3 f(x)\,dx$

2. استنتج $\int_0^3 f(x)\,dx$

27 نعتبر الدالة f المعرفة على $[-1;3]$ كما يلي:

من أجل $x \in [-1;1]$ ، $f(x) = -x + 2$

من أجل $x \in [1;3]$ ، $f(x) = \frac{1}{x^2}$

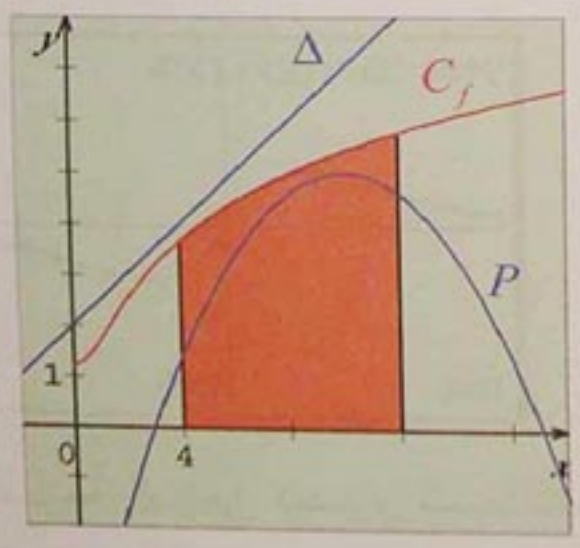
1. مثل الدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

2. هل الدالة f مستمرة على المجال $[-1;3]$؟

3. احسب $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$ إذا كان ذلك ممكنا.

28 في الشكل التالي لدينا:

- المنحنى C_f الممثل لدالة f مستمرة على $[0;+\infty[$
- القطع المكافئ P الذي معادلته $y = -\frac{1}{10}x^2 + 2x - 5$
- المستقيم Δ الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x + 2$



نعتبر المساحة A لمجموعة النقط $M(x;y)$ بحيث:

$4 \le x \le 12$ و $0 \le y \le f(x)$

1. باستعمال الشكل بين أن:

$$\frac{1}{10}x^2 + 2x - 5 \le f(x) \le \frac{1}{2}x + 2$$

2. استنتج حصرا للمساحة A

elbassair.net

3 - القيمة المتوسطة

29 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=2-3x$$

أحسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[-1;3]$.

30 مؤسسة تصنع أدوات يتم تجميعها وفق مجموعات تضم 2000 أداة. يتراوح الإنتاج اليومي للمؤسسة ما بين 2000 و 5000 أداة. نفرض أن الربح بآلاف الدنانير، بدلالة الكمية المنتجة q هو:

$$f(q)=3q^2+10q-\frac{20}{q^2} \quad \text{حيث} \quad 2\le q\le 5$$

1.عين دالة أصلية F للدالة f على المجال $[1;8]$.

2.مثل هذه الدالة على شاشة حاسبة بيانية.

3.أحسب بـ DA الربح المتوسط B_m المحقق من أجل كل مجموعة 2000 أداة.

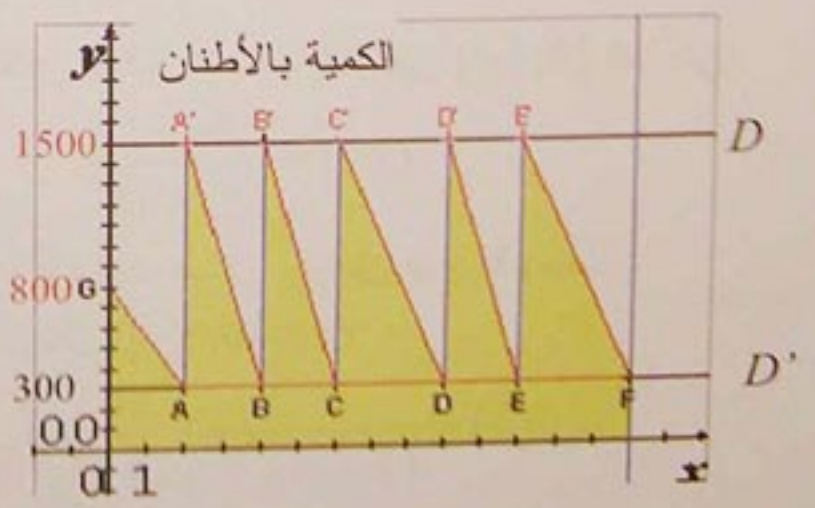
31 نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2+1}{2x^2}$$

1.احسب $\int_1^4 f(x)\,dx$

2.استنتج القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1;4]$

32 الشكل الموالي يمثل بالنسبة إلى مؤسسة، مستوى تخزين $f(x)$ لمادة أولية ضرورية للتصنيع، بدلالة الزمن (بالأشهر)،حيث كل وحدة على محور الفواصل يقابلها شهر واحد ، و كل وحدة على محور التراتيب يقابلها 100 طن . النقطة G ترتيبها800 ، و المستقيمين D و D' معادلتاهما على الترتيب $y=1500$ و $y=300$



1. احسب مساحة كل شبه منحرف (الملون بالأصفر).

2.استنتج القيمة المتوسطة للتخزين للفترات التالية $[0;2]$ ، $[2;4]$ ، $[4;6]$ ، $[6;9]$ ، $[9;11]$ و $[11;14]$

3 .استنتج القيمة المتوسطة للتخزين خلال الفترة $[0;14]$.

33 نعتبر الدالة F المعرفة كما يلي:

$$F(x)=\int_0^x \frac{\sqrt{t^2+t+1}}{1+t^2}\,dt$$

1.عين مجموعة تعريف الدالة F .

2.ادرس اتجاه تغير الدالة F .

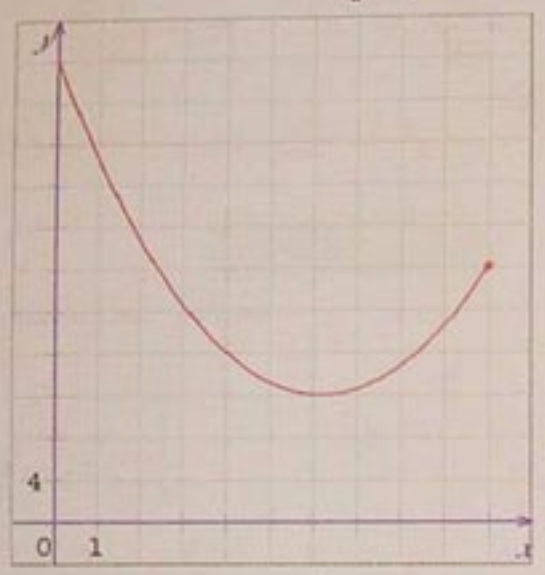
34 نعتبر الدالة f المعرفة كما يلي: $f(x)=\frac{-1}{x^2+x+1}$

1.عين مجموعة تعريف الدالة f.

2 .عين الدالة الأصلية F للدالة f و التي تنعدم من أجل 1.

3.استنتج اتجاه تغير الدالة F .

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;10]$ بتمثيلها البياني (C) المبين في الشكل الموالي



1.عين a و b حيث $f(x)=(x-a)^2+b$.

2.احسب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[0;10]$.

3.حدّد هذه القيمة في الشكل.

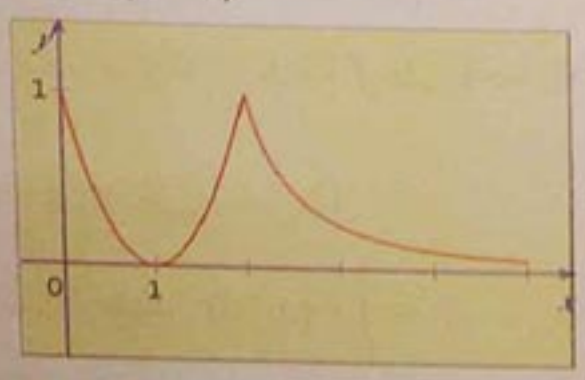
35 فيما يلي نص سؤال و الإجابة لتلميذ.

النص: (C) هو المنحنى البياني الممثل لدالة f في معلم متعامد $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث $\left\|\vec{i}\right\|=1cm$ و $\left\|\vec{j}\right\|=2cm$

الممثل لدالة f معرفة على $[0;5]$ حيث :

من اجل كل $x\in[0;2]$ ، $f(x)=(x-1)^2$

و من أجل كل $x\in[2;5]$ ، $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$



احسب المساحة تحت المنحنى (C) بين 0 و 5 مقدرة بـ cm^2 .

elbassair.net

تمارين

المساحة تحت المنحنى هي :

$$\int_0^5 f(x)\,dx$$

تحقق أن $f(x)\geq 0$ على $[0;5]$

هذه المساحة اذن هي :

$$\left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^2 + \left[\frac{-1}{x-1}\right]_2^5$$

اذكر الخاصية المستعملة

وبالتالي المساحة هي :

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{17}{12}$$

المطلوب حساب المساحة بـ cm^2

تمارين لتعمق

36 احسب التكاملات التالية:

1) $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{3}{(3x-1)^2}\right)dx$ 2) $\int_4^2\left(\frac{4}{(4-3t)^2}\right)dt$

3) $\int_1^2\left(\frac{x}{(4x^2-2)^3}\right)dx$ 4) $\int_{-1}^1\left(\frac{4x}{(x^2+1)^4}\right)dx$

37 احسب التكاملات التالية:

1) $\int_2^3\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$ 2) $\int_0^1\left(\frac{2}{\sqrt{5-3x}}\right)dt$

3) $\int_0^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx$ 4) $\int_2^3\left(\frac{x}{2\sqrt{x^2-1}}\right)dx$

38 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\left(\frac{1-2x}{4-3x}\right)\times\frac{-5}{(3x+4)^2}$$

1.بوضع $u(x)=\frac{1-2x}{3x+4}$، احسب $u'(x)$

2. برر وجود دالة أصلية F للدالة f على $]0;+\infty[$ ثم عينها.

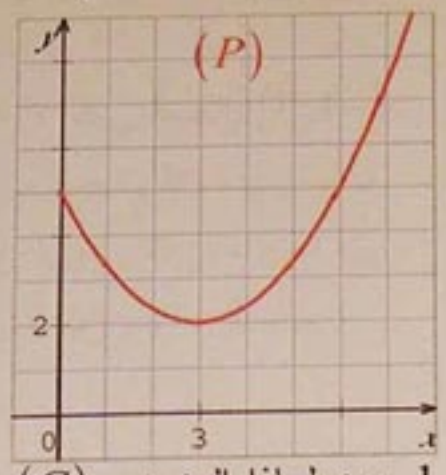
3.عين إشارة $f(x)$ على $]0;+\infty[$.

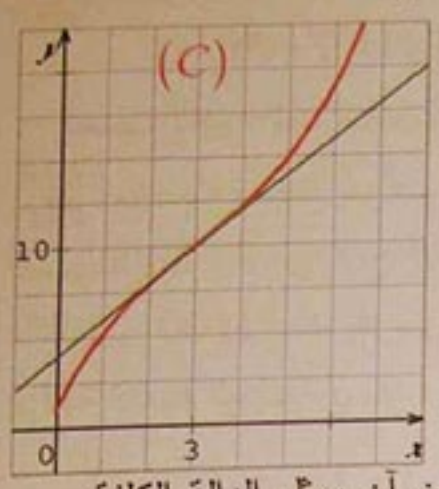
4. نعتبر التكامل I حيث $I=\int_1^2 f(x)\,dx$

أ- فسر بيانيا التكامل I .

ب-احسب I .

39 الكلفة الهامشية لمنتوج C_m ممثلة بجزء من قطع مكافئ (P) من أجل $q\in[0;+\infty[$.





1. بين لماذا المنحنى (C) يمكن أن يمثل الدالة الكلفة الإجمالية للمنتوج ؟

2.عين الدالة C_m للكلفة الهامشية علما أن:

$$C_m(q)=k.(q-a)^2+b$$

حيث k ، a و b أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

3. استنتج عبارة $C_T(q)$ للكلفة الإجمالية من أجل q وحدة منتجة.

40 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=-4x^3+3x+\frac{1}{2}$$

1.احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2.احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها ثم شكل جدول التغيرات للدالة f .

3.ارسم في معلم متعامد و متجانس التمثيل البياني (C_f) للدالة f.الوحدة: $2cm$ على المحورين.

4.احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_f) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما :

$x=0$ و $x=\frac{1}{2}$.

41 لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{4x+1}{(2x+1)^3}$$

1.بين أنه يوجد عددان حقيقيان a و b بحيث :

من أجل لكل $x\in[0;+\infty[$ ،

$$f(x)=\frac{a}{(2x+1)^2}+\frac{b}{(2x+1)^3}$$

2.استنتج $\int_0^1 f(x)\,dt$

42 f دالة معرفة على $]-4;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\sqrt{x+4}$$

elbassair.net

و ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس

1. ادرس تغيرات الدالة f على $]-4;+\infty[$ (يمكن استنتج تغيرات f انطلاقا من الدالة "مربع")

2. أرسم (C_f)

3. احسب الدالة المشتقة للدالة h المعرفة كما يلي:

$$h(x)=\frac{2}{3}(x+4)\sqrt{x+4}$$

4. استنتج مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و محوري الإحداثيات.

43 F ، g و h ثلاث دوال معرفة على $[0;1]$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}\ ،\ g(x)=1-\frac{x}{2}\ \text{و}\ h(x)=1-\frac{x^2}{2}$$

1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;1]$:

$$g(x)\le f(x)\le h(x)$$

2. بين أن: $\frac{2}{3}\le\int_0^1 f(x)\,dx\le\frac{3}{4}$

44 احسب التكاملات التالية:

1) $\int_{-3}^{0}\left|x^2-x-2\right|dx$ 2) $\int_{-1}^{1}\left|x^3-x\right|dt$

3) $\int_{-2}^{2}(|x|+x)\,dx$ 4) $\int_{-\frac{1}{2}}^{1}-x^2+|x+1|\,dx$

45 f دالة معرفة على $[0;1]$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{4x+2}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

1. احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $[0;1]$.

2. شكل جدول تغيرات f.

3. ارسم (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$

4. احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها $y=2$ ، $x=0$ و $x=1$

46 1. احسب التكامل $I_1=\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)^3}dx$

2. ليكن $I_2=\int_0^1\frac{x^3}{(1+x^2)^3}dx$

احسب I_1+I_2. استنتج قيمة I_2

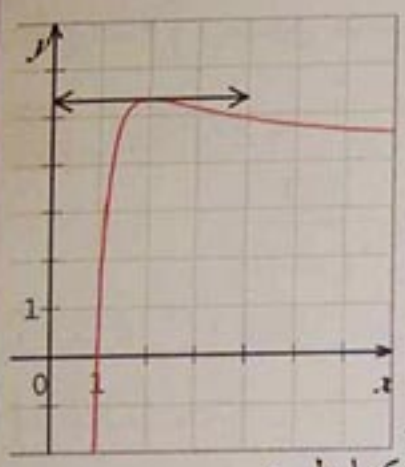
3. قارن بين x ، x^2 و x^3 على المجال $[0;1]$.

استنتج حصرا للتكامل $I_2=\int_0^1\frac{x^2}{(1+x^2)^3}dx$

47 f دالة معرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{16(ax^2+b)}{(2x-1)^2}$$

و (C) المنحنى البياني الممثل لها في معلم متعامد و متجانس و D المماس للمنحنى (C) عند النقطة $A\left(2;\frac{16}{3}\right)$ والموازي لمحور الفواصل.



1. أ- عبر عن $f'(x)$ بدلالة a و b.

2. عين معاملي توجيه المستقيم D.

ج- عين a و b.

2. g الدالة المعرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ كما يلي:

$$g(x)=\frac{8x^2-2x+1}{2x-1}$$

أ- بين أن الدالة g أصلية للدالة f على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

ب- احسب مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحني (C) و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=1$ و $x=2$.

48 f و g دالتان معرفتان على $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=x+\frac{x+1}{x^3}\ \text{و}\ g(x)=x-\frac{2x-1}{x^4}$$

(C_f) و (C_g) هما التمثيلان البيانيان للدالتين f و g في معلم متعامد و متجانس الوحدة على المحورين $1cm$

1. أ- تحقق من أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=x$ مستقيم مقارب لـ (C_f) و (C_g) عند $+\infty$.

ب- عين وضعية (C_f) بالنسبة إلى Δ ثم وضعية (C_g) بالنسبة إلى Δ.

ج- ادرس تغيرات كل من f و g على $]1;+\infty[$.

د- شكل جدولي تغيرات كل من f و g.

هـ - أنشئ Δ ، (C_f) و (C_g).

2. أ- عين دالة أصلية للدالة $H:x\mapsto\frac{x+1}{x^3}$ على $]1;+\infty[$

ثم دالة أصلية للدالة $K:x\mapsto\frac{2x-1}{x^4}$ على $]1;+\infty[$

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

ب- احسب $\int_3^4 \frac{x+1}{x^3}dx$ و $\int_3^4 \frac{2x-1}{x^4}dx$

ج- قارن بين مساحتي الحيزين المحددين بـ (C_f) و Δ من جهة و المنحني (C_g) و Δ من جهة أخرى على المجال $[3;4]$.

49 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=\sqrt{x^2+1}$$

بحصر الدالة f بدالتين تآلفيتين ، عين حصرا للتكامل $\int_1^5 f(x)dx$ بعددين طبيعيي الفرق بينهما 2.برر.

50 f دالة معرفة على $]-\infty;1[$ كما يلي:

$$f(x)=x+\alpha+\frac{\beta}{2(x-1)^2}$$

و ليكن (C_f) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث $\|\vec{i}\|=2cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$

1. الدالة f تقبل قيمة حدية كبرى عند النقطة O مبدأ المعلم
- عبر عن $f'(x)$ بدلالة α و β .
- جد علاقة بين α و β بحيث (C_f) يشمل النقطة O .
- عين α و β .

2.أ- احسب $\lim_{x\to 1} f(x)$ ، فسر النتيجة بيانيا.

ب- احسب $\lim_{x\to -\infty} f(x)$.

ج- احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $]-\infty;1[$.

د- شكل جدول تغيرات f.

هـ - استنتج إشارة $f(x)$ على $]-\infty;1[$.

3.أ- بين أن المنحني (C_f) يقبل المستقيم Δ الذي معادلته $y=x+\frac{1}{2}$ كمقارب عند $-\infty$.

ب- ادرس وضعية المنحني (C_f) النسبة للمستقيم Δ .

4.جد دالة أصلية F للدالة f على المجال $]-\infty;1[$.

5.احسب مساحة الحيز لمجموعة النقط $M(x;y)$ حيث:

$-2\le x\le -1$ و $f(x)\le y\le 0$

6. أ- احسب $\int_{-3}^{-2} \frac{1}{2(x-1)^2}dx$

ب- استنتج مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحني (C_f) و المستقيم Δ و المستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=-3$ و $x=-2$.

51 نعتبر الدالتين f_1 و f_2 للمتغير الحقيقي x حيث:

$f_1(x)=x^2-2x+1$ و $f_2(x)=x^3-3x+2$

1.ادرس تغيرات الدالتين f_1 و f_2 ، ثم ارسم في معلم متعامد و متجانس المنحنيين (C) و (Γ) الممثلين للدالتين f_1 و f_2 على الترتيب.

2.تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$$x^3-x^2-x+1=(x-1)^2(x+1)$$

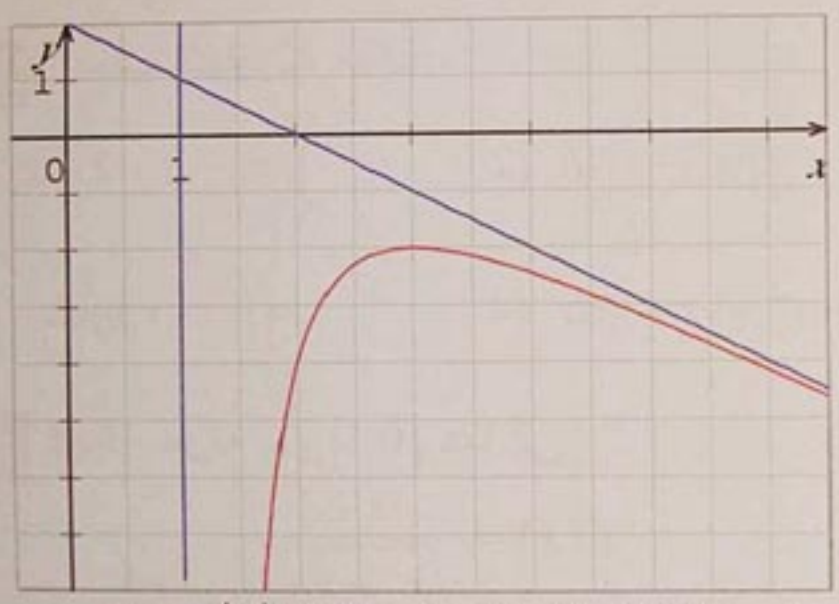
3.عين إحداثيات نقط تقاطع المنحنيين (C) و (Γ).

4. احسب مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنيين (C) و (Γ).

مسائل

52 في الشكل الموالي رسمنا المستقيم D و المنحني (C) الممثل للدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=-x+2-\frac{4}{(x-1)^2}$$



1. عين معادلة المستقيم D على الشكل $y=g(x)$

- بين أن D مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$

2. عين المساحة A لمجموعة النقط $M(x;y)$ من المستوي و التي تحقق: $\begin{cases} 2\le x\le 4 \\ f(x)\le y\le g(x) \end{cases}$

3. ليكن α عدد حقيقي من المجال $]2;+\infty[$

أ- عبر بدلالة α عن التكامل $I_\alpha=\int_2^\alpha \frac{4}{(x-1)^2}dx$

ب- فسر هندسيا هذا التكامل.

ج-عين نهاية I_α عندما يؤول α إلى $+\infty$

53 نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;6]$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{36}(-x^2+6x)$$

1. أ- ارسم منحني الدالة f في معلم متعامد.

elbassair.net

ب-احسب $\int_0^6 f(x)\,dx$.فسر هندسيا النتيجة.

ج- ليكن a و b عددان حقيقيان كيفيان من المجال $[0;6]$ حيث $a<b$.

• بين أن $0 \le \int_a^b f(x)\,dx \le 1$

2. مؤسسة تصنع منتوجا و تبيع كل أسبوع x آلاف وحدة حيث $0 \le x \le 6$

ليكن a و b عددان حقيقيان من المجال $[0;6]$ حيث $a \le b$

$\int_a^b f(x)\,dx$ إذن هو احتمال بيع ما بين a و b آلاف وحدة من أجل أسبوع مختار عشوائيا.

عين احتمال بيع :

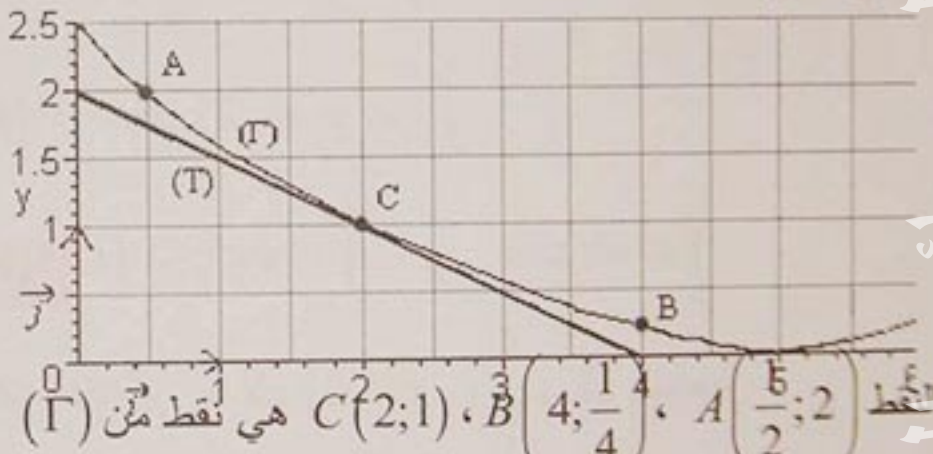
أ- أقل من 2000 وحدة

ب- ما بين 2000 و 4000 وحدة.

ج- أكثر من 4000 وحدة.

54 بكالوريا

يعطى التمثيل البياني (Γ) لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $[0;6]$.



النقط $A\left(\frac{5}{2};2\right)$ ، $B\left(4;\frac{1}{4}\right)$ ، $C(2;1)$ هي نقط من (Γ)

و T هو المماس لـ (Γ) عند C .

1.أ- عين بقراءة بيانية القيمة الحدية الصغر و القيمة الحدية الكبرى للدالة f على $[0;6]$.

ب- عين بقراءة بيانية صورة المجال $[0;2]$ بالدالة f .

ج- أعط مجموعة حلول المتراجحة $f(x)<\frac{1}{2}$

2. نقبل أن T يوازي (AB).

أ- عين $f'(2)$

ب- استنتج معادلة T و معادلة (AB).

ج-بين بالاستعانة بالتمثيل البياني أنه من أجل كل $x \in \left[\frac{1}{2};4\right]$ لدينا: $\frac{-x}{2}+2 \le f(x) \le \frac{-x}{2}+\frac{9}{4}$

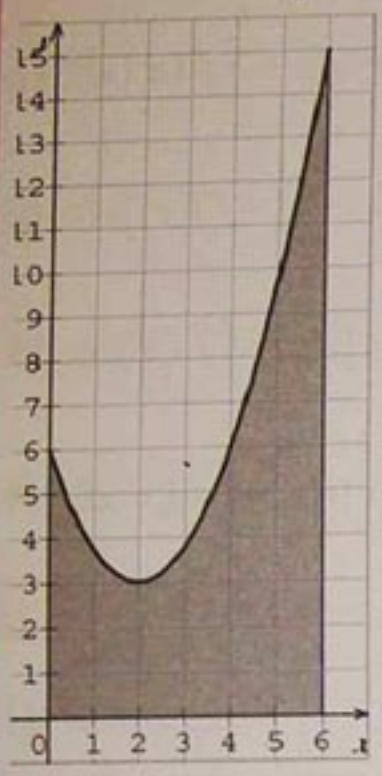
3.نضع $I=\int_{\frac{1}{2}}^{4} f(x)\,dx$

• باستعمال النتائج السابقة استنتج أن $\frac{49}{16} \le I \le \frac{63}{16}$

55 بكالوريا

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;6]$ كما يلي:

$f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+6$



المنحنى (C_f) لمرسوم في الشكل المقابل هو للدالة f في معلم متعامد ومتجانس مبدؤه O .

الجزء المضلل هو الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f)، محور الفواصل، محور التراتيب و المستقيم الذي معادلته $x=6$.

1. احسب ، بوحدة المساحات $(u.a)$ ،المساحة S للجزء المضلل.

2. نعتبر نقطة M من المنحنى (C_f) فاصلتها x حيث $x \in [0;6]$.الموازي لمحور التراتيب و الذي يمر بالنقطة M يقطع محور الفواصل في النقطة H . لمحور الفواصل و الذي يمر بالنقطة M يقطع محور التراتيب في النقطة K نسمي $R(x)$ المساحة، بوحدة المساحات $(u.a)$ ،للمستطيل $OHMK$.

• بين انه من أجل كل عدد حقيقي x من $[0;6]$ لدينا:

$R(x)=0,75x^3-3x^2+6x$

3.نريد البحث عن جميع قيم x الممكنة من المجال $[0;6]$ بحيث تكون المساحة $R(x)$ مساوية للمساحة S .

أ- بين أن هذا البحث يؤدي إلى حل المعادلة $g(x)=0$

حيث g هي الدالة المعرفة على $[0;6]$ بـ:

$g(x)=0,75x^3-3x^2+6x-36$

ب- استنتج تغيرات الدالة g على $[0;6]$ ، وشكل جدول تغيرات g.

استنتج أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل على $[0;6]$ حلا واحدا α .

• أعط قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α .

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

اختبر معلوماتك

اختيار من متعدد

56 لكل الأسئلة التالية ، إجابة واحدة على الأقل صحيحة من بين الأجوبة المقترحة

لتكن f دالة معرفة و مستمرة على مجال I يشمل الأعداد الحقيقية a ، b و c :

1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

2) $\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_a^c (-f(x))dx$

3) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^a f(x)dx$

4) $\int_a^b f(x)dx = \int_c^b f(x)dx - \int_c^a f(x)dx$

57 لتكن f دالة زوجية ، مستمرة و موجبة على $[-2;2]$

1) $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 0$ 2) $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_{0}^{2} f(x)dx$

3) $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2\int_{0}^{-2} f(x)dx$ 4) $\int_{-2}^{2} f(x)dx = -2\int_{0}^{-2} f(x)dx$

58 لتكن M القيمة المتوسطة للدالة f على مجال $[a;b]$

1) $M = \int_a^b \frac{f(b)-f(a)}{b-a}dx$ 2) $M = \int_a^b \frac{f(x)}{b-a}dx$

3) $M = \frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)dx$ 4) $M = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

59 $\int_1^2 \frac{3}{x^4}dx = \ldots$

1) $-\frac{9}{8}$ 2) $\frac{7}{8}$ 3) $\frac{9}{8}$

60 f دالة معرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـــ:

$$f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2}$$

1) الدالة f تقبل دوالا أصلية على $[0;2]$.

2) $I = \int_2^3 f(x)dx$ موجود و دالة أصلية للدالة f على $[2;3]$ هي الدالة F حيث $F(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{x^2-1}$

3) $I = \frac{45}{8}$

صحيح أم خاطئ

اذكر إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة مع تبرير الجواب

61 f دالة معرفة و تقبل دوالا أصلية على $\mathbb{R}$

1) $\left(\int_1^2 f(x)dx\right)\left(\int_2^3 f(x)dx\right) = \int_1^3 f(x)dx$

2) $\int_0^2 -f(x)dx = \int_2^0 f(x)dx$

3) إذا كان $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ عدد حقيقي موجب فإن الدالة f موجبة على المجال $[-1;1]$

4) إذا كانت f دالة فردية فإن $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ حيث $a \in \mathbb{R}$

62 F دالة أصلية للدالة f على $[a;b]$

1) $\int_a^b f(x)dx = F(a)-F(b)$ 2) $\int_0^x 4t\,dt = 2x^2$

3) $\int_1^0 (t^3+t)\,dt = \frac{x^4+2x^2-3}{4}$

4) $\int_{-1}^{0} (x^2+x-2)\,dx \geq 0$

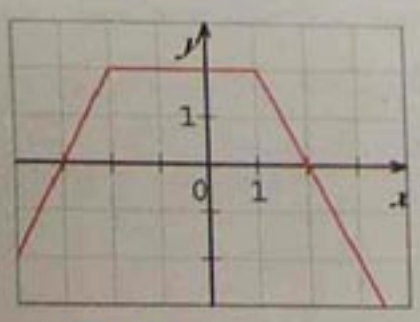
63 1) $\int_1^{10} x^2\,dx \geq 0$ و $\int_{10}^{1} x^2\,dx \leq 0$

2) التكامل $\int_1^2 (-x^2-1)\,dx =$ يمثل مساحة

3) $\int_0^2 x^3\,dx$ هو مساحة حيز المستوي المحدد بالمنحني الذي معادلته $y = x^3$ و محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 0$ و $x = 2$

4) $\int_1^1 (x^4-3x^2+x-1)dx < 0$

64 f دالة معرفة و مستمرة على $\mathbb{R}$ و (C) هو تمثيلها البياني في الشكل التالي :



1) $\int_{-3}^{-2} f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx$

2) $\int_{-2}^{1} -f(x)dx = 6$

3) $\int_{-3}^{2} f(x)dx = 8$

elbassair.net

6 الدالة اللوغاريتم النيبيري 6

الكفاءات المستهدفة

- تعريف الدالة اللوغاريتم النيبيري.
- معرفة خواص الدالة اللوغاريتم النيبيري .
- استعمال حاسبة لحساب قيم دوال لوغاريتم نيبيري.
- حساب نهايات تتضمن لوغاريتم نيبيري.
- دراسة دوال من الشكل $\ln\circ u$.

* * **ابن حمزة المغربي:** جزائري الأصل، من العلماء البارزين في القرن العاشر للهجرة (أي السادس عشر للميلاد) و قد قضى فترة من الزمن في استنابول يُدرّس علم الرياضيات.

هو ممن مهدوا لاختراع اللوغاريتمات، وكانت بحوثه في المتواليات هي الأساس الذي بني عليه هذا الفرع من الرياضيات، فقد تكلم عن الصلة بين المتوالية الحسابية و الهندسية كلاماً جعله واضعاً لأصول اللوغاريتمات.

وقد شكلت نتائجه هذه حجر الأساس الذي اعتمد عليه العالم نابير الاسكتلندي لتطوير علم اللوغاريتمات.

كان ابن حمزة مغرماً بعلم الحساب إلى درجة أنه، عندما ذهب لأداء مناسك الحج، أقام في مكة المكرمة مدة من الزمن يعلّم الحساب لحجاج بيت الله الحرام.

من أهم مؤلفاته كتابه "تحفة الأعداد لذوي الرشد والسداد" و قد كان تحفة فريدة في بحث المسائل الحسابية التي يستعملها الناس كل يوم، كما تعرض للمسائل التي تدور حول المساحات و الحجوم، وكتب كتابه هذا باللغة التركية، وألفه بمكة المكرمة، في مقدمة، وأربعة فصول، و خاتمة.



جون نابير

* **ابن يونس(950 م – 1009 م):** أما ابن يونس المصري فقد ابتكر القانون المعروف في حساب المثلثات $\cos(a)\times\cos(b)=\frac{1}{2}(\cos(a+b)+\cos(a-b))$ الذي يقضي بتحويل الضرب إلى عملية جمع، فكان بذلك واضعا أول حجر في تطوير علم اللوغاريتمات.

* **جون نابير(1550 م – 1617 م):** قام الرياضياتي الاسكتلندي جون نابير بنشر كتابه «وصف قاعدة اللوغاريتمات العجيبة» عام 1614 فافتتح به عهد اللوغاريتمات الحديثة.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

النشاط الأول

من أجل كل عدد طبيعي n نعتبر الدالة f_n المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي: $f_n(x)=\frac{1}{x^n}$

1. باستعمال إحدى النتائج الخاصة بالدوال الأصلية لدوال مألوفة عين دالة أصلية على المجال $]0;+\infty[$ لكل دالة من الدوال التالية: f_2 ، f_3، f_4 و f_5.

2. اشرح لماذا لا تسمح النتيجة المستعملة في السؤال الأول من تعيين دالة أصلية للدالة $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$.

3. نعلم أن الدالة $f_1 : x \mapsto \frac{1}{x}$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ فهي تقبل إذن دوالا أصلية على هذا المجال و تقبل بصفة خاصة دالة أصلية وحيدة تأخذ القيمة 0 من أجل القيمة 1 للمتغير.

تعريف: تسمى الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ و التي تنعدم عند 1، دالة اللوغاريتم النيبيري و نرمز إليها بـ $\ln$

- عبر من أجل كل x من $]0;+\infty[$ عن $\ln(x)$ باستعمال التكامل.
- عين قيمة $\ln(1)$.
- من أجل كل x من $]0;+\infty[$، عين عبارة الدالة المشتقة للدالة: $x \mapsto \ln(x)$.
- استنتج اتجاه تغير الدالة $x \mapsto \ln(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

النشاط الثاني



ليكن (C) التمثيل البياني للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$ في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

و حدة المساحة هي مساحة المربع $OIKJ$ حيث $K(1;1)$.

نسمي $a(t)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=t$.

1. عبر عن $a(t)$ بدلالة $\ln(t)$. نميز الحالتين: $t>1$ و $0<t<1$.
2. تحقق أن $\ln(2)\approx 0,7$.
3. عين بيانيا قيمة مقربة لكل من $\ln(3)$ و $\ln(4)$.
4. خمن قيمة العدد الحقيقي λ الذي يحقق $\ln(4)=\lambda\ln(2)$.
5. بين بيانيا لماذا $\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2$ ؟
6. باستعمال اللمسة LN لحاسبة تحقق من صحة النتائج المحصل عليها في الأسئلة السابقة.

elbassair.net

النشاط الثالث

1.نعتبر العددين a ، b حيث $a=138,3$ و $b=47,8$

- باستعمال حاسبة أحسب الجداء $a\times b$ ثم $\ln(a\times b)$.
- باستعمال حاسبة أحسب $\ln(a)$ ، $\ln(b)$ ثم المجموع $\ln(a)+\ln(b)$.
- قارن بين العددين $\ln(a\times b)$ و $\ln(a)+\ln(b)$.

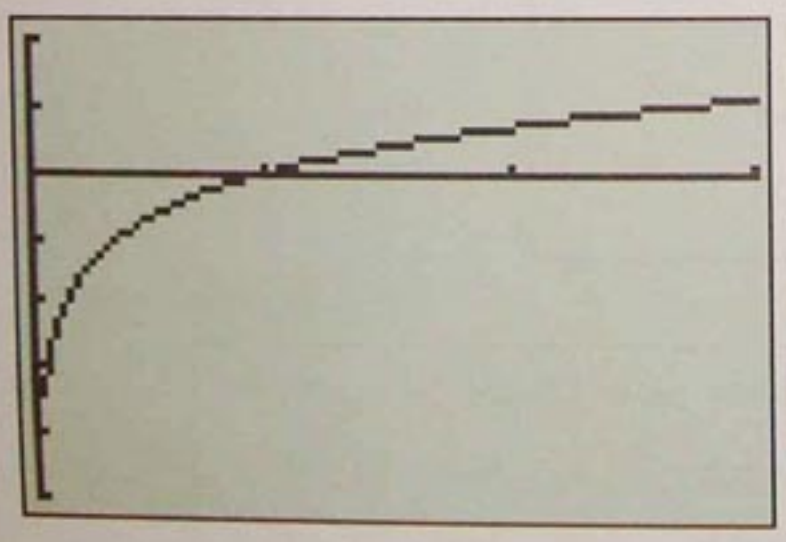
2.باستعمال مجدول و علما أن رمز دالة اللوغاريتم النيبيري هو " LN "

- أنجز و اتمم و رقة الحساب الموالية:

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	a*b	LN(a)	LN(b)	LN(a)+LN(b)	LN(a*b)
2	115	26.4	3036	4.744932128	3.27336401		
3	128.17	34.7					
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20	352.06	175.8					

- ضع تخمينا.
- جرب صحة تخمينك من أجل قيم مختلفة للعددين a و b.

النشاط الرابع



1. باستعمال حاسبة بيانية مثلنا في الشكل المقابل التمثيل البياني للدالة $\ln : x \mapsto \ln(x)$

- ماذا يمكن القول عن $\ln(x)$ لما يقترب x من0 ؟
- أعد رسم المنحني السابق باختيار النافذة التالية:

$$0<x<1,5 \quad \text{و} \quad -5<y<1$$

ثم قارن مع جوابك السابق.

- بأخذ نوافذ أخرى خمن نهاية الدالة $\ln$ عند 0.

2. باستعمال حاسبة بيانية:

- أكمل الجدول التالي:

x	100	1000	10000	100000	1000000
$\ln(x)$					

- خمن نهاية الدالة $\ln$ عند $+\infty$.

3. ما هو في رأيك اتجاه تغير الدالة $\ln$ ؟

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

ـ دالة اللوغاريتم النيبيري

1. تعريف

الدالة $t \mapsto \frac{1}{t}$ مستمرة على المجال $]0;+\infty[$ فهي تقبل إذن دوالا أصلية على هذا المجال و تقبل بصفة خاصة دالة أصلية وحيدة تأخذ القيمة 0 من أجل القيمة 1 للمتغير.

تعريف: نسمي الدالة اللوغاريتم النيبيري و نرمز إليها بالرمز " ln " الدالة الأصلية على المجال $]0;+\infty[$ للدالة $t \mapsto \frac{1}{t}$ و التي تنعدم عند 1.

ترميز: نرمز إلى اللوغاريتم النيبيري لعدد x من $]0;+\infty[$ بـ $\ln(x)$ و أحيانا $\ln x$.

لدينا هكذا: من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\ln(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt$

مثال: باستعمال حاسبة نتحصل مثلا على: $\ln 3 \approx 1,09861$.

2. نتائج

- من التعريف لدينا: $\ln(1)=0$
- الدالة اللوغاريتم النيبيري قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $(\ln)'(x)=\frac{1}{x}$
- من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\frac{1}{x}>0$ و منه الدالة " ln " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	+	
$\ln x$	‖	0 ↗	

نستنتج الخواص التالية:

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$:

1) $\ln a=\ln b$ يعني $a=b$.

2) $\ln a<\ln b$ يعني $a<b$.

3. إشارة $\ln(x)$

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ لدينا:

- $\ln x=0$ يعني $x=1$.
- $\ln x>0$ يعني $x>1$.
- $\ln x<0$ يعني $0<x<1$.

elbassair.net

تمرين محلول1: عين مجموعة تعريف الدالتين f و g المعرفتين كما يلي:

$$f(x)=\ln(x-3) \quad \text{و} \quad g(x)=\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$$

طريقة: اللوغاريتم النيبيري لعدد سالب أو معدوم ليس له معنى.

الحل:

1. تكون الدالة f معرفة من أجل الأعداد الحقيقية x حيث $x-3>0$ أي $x>3$.
مجموعة تعريف الدالة f هي إذن $D=]3;+\infty[$.

2. تكون الدالة g معرفة من أجل الأعداد الحقيقية x حيث $\frac{x+2}{x-1}>0$ و $x-1\neq 0$
و هذا يعني $(x+2)(x-1)>0$ أي $x<-2$ أو $x>1$
مجموعة تعريف الدالة g هي إذن $D=]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.

تمرين محلول2: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$\ln(x^2-1)=\ln(x+5) \quad (1) \qquad \text{و} \qquad \ln(x^2-1)<\ln(x+5) \quad (2)$$

طريقة: لحل المعادلة $\ln[u(x)]=\ln[v(x)]$ (على التوالي المتراجحة $\ln[u(x)]<\ln[v(x)]$) :

- نعين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).
- نحل في D المعادلة $u(x)=v(x)$ (على التوالي المتراجحة $u(x)<v(x)$).

الحل:

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x^2-1>0$ و $x+5>0$
$x^2-1>0$ تعني $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ و $x+5>0$ تعني $x>-5$ و منه $D=]-5;-1[\cup]1;+\infty[$.
من أجل كل x من D، (1) تعني $x^2-1=x+5$ أي $x^2-x-6=0$.
حلا المعادلة $x^2-x-6=0$ هما (-2) و 3 و كلاهما عنصر من D. مجموعة الحلول هي إذن $S=\{-2;3\}$.

2. مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي نفسها $D=]-5;-1[\cup]1;+\infty[$.
من أجل كل x من D، (2) تعني $x^2-1<x+5$ أي $x^2-x-6<0$.
بما أن جذري x^2-x-6 هما (-2) و 3 فإن $x^2-x-6<0$ تعني $x\in]-2;3[$. حلول المتراجحة (2) هي إذن الأعداد الحقيقية من المجال $]-2;3[$ و التي تنتمي إلى D. مجموعة الحلول هي إذن $S=]-2;-1[\cup]1;3[$.

تمرين محلول3: عين حسب قيم x إشارة $\ln(x-3)$

الحل:

- $\ln(x-3)\leq 0$ يعني $0<x-3\leq 1$ إي $3<x\leq 4$.
- $\ln(x-3)>0$ يعني $x-3>1$ إي $x>4$. و منه إشارة $\ln(x-3)$ هي ملخصة في الجدول التالي:

x	3		4		$+\infty$
$\ln(x-3)$	‖	$-$	0	$+$	

ملاحظة: كان بالإمكان تعيين مجموعة التعريف ثم الاكتفاء بحل إحدى المتراجحتين.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

الدرس

ـ الخواص الجبرية

1.الخاصية الأساسية

خاصية: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ ، $\ln(ab)=\ln a+\ln b$.

البرهان: a عدد حقيقي موجب تماما. نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln(ax)-\ln(x)$

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=a\times\frac{1}{ax}-\frac{1}{x}=0$ و منه f دالة ثابتة على $]0;+\infty[$.

لدينا $f(1)=\ln(a)-\ln(1)=\ln(a)$. إذن من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f(x)=\ln(a)$ و بالتالي:

$\ln(ax)-\ln(x)=\ln(a)$ و هكذا من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\ln(ax)=\ln(a)+\ln(x)$. نأخذ $x=b$.

ملاحظة: يتم تعميم هذه النتيجة إلى عدة أعداد حقيقية موجبة تماما و هكذا يكون لدينا:

من أجل كل أعداد حقيقية $a_1, a_2, \ldots, a_n$ من $]0;+\infty[$ ، $\ln(a_1a_2\ldots a_n)=\ln a_1+\ln a_2+\ldots+\ln a_n$.

2.نتائج

نتيجة1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b من $]0;+\infty[$ ،

$\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ و $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

البرهان:

* من أجل a من $]0;+\infty[$ ، $a\times\frac{1}{a}=1$ و منه $\ln\left(a\times\frac{1}{a}\right)=0$ أي $\ln(a)+\ln\left(\frac{1}{a}\right)=0$ و منه $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$.

* من أجل a و b من $]0;+\infty[$ ، $\ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln\left(a\times\frac{1}{b}\right)=\ln a+\ln\left(\frac{1}{b}\right)=\ln a-\ln b$.

نتيجة2: من أجل كل a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل n من $\mathbb{Z}$ ، $\ln(a^n)=n\ln a$.

البرهان: a عدد حقيقي من $]0;+\infty[$ و n عدد صحيح نسبي. نميز الحالات التالية:

1.الحالة الأولى: $n\geq 0$. نستعمل البرهان بالتراجع. و من أجل ذلك نسمي $P(n)$ الخاصية $\ln(a^n)=n\ln a$.

- من أجل $n=0$ لدينا: $\ln(a^0)=\ln(1)=0=0\ln a$ و بالتالي $P(0)$ صحيحة.
- فرضية التراجع: نفرض صحة $P(n)$ من أجل n حيث $n\geq 0$ أي $\ln(a^n)=n\ln a$.
- وراثية الخاصية ابتداء من الرتبة 0: نبرهن صحة $P(n+1)$ أي $\ln(a^{n+1})=(n+1)\ln a$. لدينا:

$\ln(a^{n+1})=\ln(a^n\times a)=\ln(a^n)+\ln a=n\ln a+\ln a=(n+1)\ln a$ و منه $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة: من أجل كل عدد طبيعي n ، $\ln(a^n)=n\ln a$.

2.الحالة الثانية: $n<0$. $\ln(a^n)=\ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right)=-\ln(a^{-n})=-(-n)\ln a=n\ln a$ لأن $-n>0$.

نتيجة3: من أجل كل عدد حقيقي a من $]0;+\infty[$ ، $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$.

البرهان: من أجل a من $]0;+\infty[$ ، $\ln a=\ln\left[(\sqrt{a})^2\right]=2\ln(\sqrt{a})$ و منه $\ln(\sqrt{a})=\frac{1}{2}\ln a$.

elbassair.net

تمرين محلول1: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$\ln(x+2)+\ln(x+3)=\ln 6$ (1) و $\ln(x+2)+\ln(x+3)\le \ln 6$ (2)

طريقة: الكتابة $\ln a+\ln b$ تفرض أن يكون $a>0$ و $b>0$ بينما الكتابة $\ln(a\times b)$ تفرض أن يكون $ab>0$ و يعني هذا أنه يمكن للعددين a و b أن يكونا سالبين معا.و لذا فلابد من تعيين مجموعة التعريف قبل أي تغيير.

الحل:

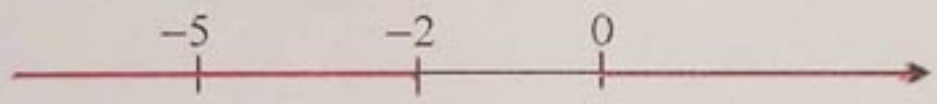
1.تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $x+2>0$ و $x+3>0$ م هذا يعني $x>-2$ و $x>-3$ و منه مجموعة تعريفها هي $D=]-2;+\infty[$.

من أجل كل x من D، (1) تعني $\ln(x+2)(x+3)=\ln 6$ و هذا يعني $(x+2)(x+3)=6$ أي $x^2+5x=0$ للمعادلة $x^2+5x=0$ حلان هما (-5) و 0. نلاحظ أن 0 عنصر من D بينما (-5) لا ينتمي إلى D.

مجموعة الحلول هي إذن $S=\{0\}$.

2.مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي نفسها $D=]-2;+\infty[$.

من أجل كل x من D، (2) تعني $\ln(x+2)(x+3)\le \ln 6$ و هذا يعني $(x+2)(x+3)\le 6$ أي $x^2+5x\le 0$ يعني $-5\le x\le 0$ و منه مجموعة الحلول هي $S=[-5;0]\cap D=]-2;0]$



تمرين محلول2: بلغ عدد سكان بلد 10 ملايين نسمة يوم 2007/01/01.

1. في أي سنة يصبح عدد السكان ضعف ما كان عليه إذا علمت أن عدد السكان يرتفع سنويا بنسبة 5% ؟
2. في أي سنة يصبح عدد السكان نصف ما كان عليه إذا علمت أن عدد السكان ينقص سنويا بنسبة 5% ؟

الحل:

1. في 01 جانفي من السنة $2007+n$ يكون عدد سكان البلد هو $10^6\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$ أي $10^6(1,05)^n$.

لنعين أصغر عدد طبيعي n يحقق $10^6(1,05)^n\ge 2\times 10^6$ أي $(1,05)^n\ge 2$.

$(1,05)^n\ge 2$ يعني $\ln(1,05)^n\ge \ln(2)$ لأن الدالة " ln " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

نحصل على $n\ln(1,05)\ge \ln(2)$ أي $n\ge \frac{\ln(2)}{\ln(1,05)}$ لأن $\ln(1,05)>0$ بما أن $1,05>1$.

لدينا $\frac{\ln(2)}{\ln(1,05)}\approx 14,20$. و منه أصغر عدد طبيعي n يحقق المطلوب هو $n=15$.

يتضاعف إذن عدد سكان هذا البلد بعد 15 سنة أي سنة 2022.

2. في 01 جانفي من السنة $2007+n$ يكون عدد سكان البلد هو $10^6\left(1-\frac{5}{100}\right)^n$ أي $10^6(0,95)^n$.

لنعين أصغر عدد طبيعي n يحقق $10^6(0,95)^n\le 0,5\times 10^6$ أي $(0,95)^n\le 0,5$ أي $n\ln(0,95)\le \ln(0,5)$

نجد $n\ge \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,95)}$ لأن $\ln(0,95)<0$. أي $n\ge 13,51$. أصغر عدد طبيعي n يحقق المطلوب هو $n=14$.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

ـ دراسة دالة اللوغاريتم النيبيري

1. النهايات

خواص: نهاية الدالة " ln " عند $+\infty$ هي $+\infty$ و نهايتها عند 0 هي $-\infty$.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و (2) $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$

البرهان:

- نقبل دون برهان الخاصية (1) .
- من أجل x من $]0;+\infty[$ ، نضع $X=\dfrac{1}{x}$ و منه $\ln X=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x$. لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}X=+\infty$

و من الخاصية (1) لدينا: $\lim\limits_{X\to+\infty}(-\ln X)=-\infty$ و هكذا فإن $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=\lim\limits_{X\to+\infty}(-\ln X)=-\infty$.

2. جدول التغيرات

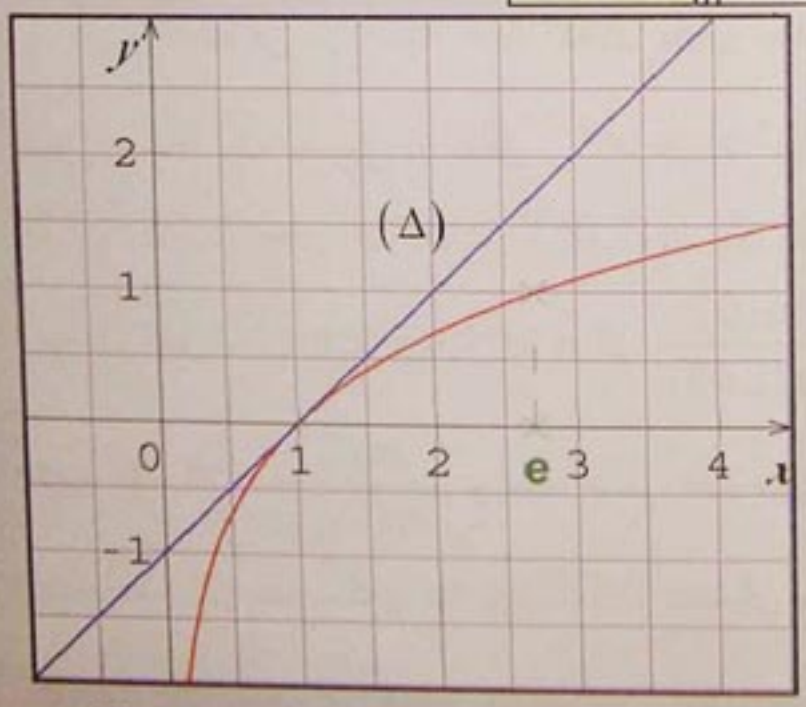
- دالة اللوغاريتم النيبيري قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $(\ln)'(x)=\dfrac{1}{x}$
- من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\dfrac{1}{x}>0$ و منه الدالة " ln " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	+		+	
$\ln x$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

3. التمثيل البياني

ليكن (C) التمثيل البياني لدالة اللوغريتم النيبيري في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

- المنحنى (C) الممثل للدالة اللوغاريتم النيبيري يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب.
- لدينا $\ln'(1)=1$ و $\ln 1=0$. إذن يقبل المنحنى (C) عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماسا $(\Delta):y=x-1$.



1. العدد e

الدالة " ln " مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ و تأخذ قيمها في $\mathbb{R}$ ، حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $\ln x=1$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;+\infty[$. نرمز إلى هذا الحل بالرمز " e ".

تعريف: العدد e هو العدد الذي لوغاريتمه النيبيري يساوي 1 . $(\ln e=1)$. تعطينا الحاسبة $e\approx 2,718281828$.

elbassair.net

تمرين محلول1: ليكن (Δ) مماس المنحني (C) الممثل للدالة $x \mapsto \ln x$ عند النقطة $A(e;1)$.

1. عين معادلة للمماس (Δ).
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln(x)-\frac{1}{e}x$. احسب $f(e)$.
3. استنتج وضعية المنحني (C) بالنسبة للمماس (Δ).

الحل:

1. معادلة (Δ) هي: $y=\frac{1}{e}(x-e)+1$ و منه $(\Delta): y=\frac{1}{e}x$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$		0	

2. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=\frac{e-x}{ex}$.

بما أن $x>0$ فإن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $e-x$. و هكذا:

$f'(x)\geq 0$ من أجل $0<x\leq e$ و $f'(x)<0$ من أجل $x>e$.

$f(e)=0$ هي القيمة الحدية العظمى للدالة f على $]0;+\infty[$.

3. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f(x)\leq 0$ أي من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $\ln(x)\leq\frac{1}{e}x$.

نستنتج إذن أن المنحني (C) يقع تحت المماس (Δ) على المجال $]0;+\infty[$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;e[\cup]e;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$

1. أدرس نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f.

الحل:

1. $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)}{\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=-1$ لأن $\lim_{x\to 0}\ln x=-\infty$ و $\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln x}=0$.

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)}{\ln x\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{1}{\ln x}+1\right)}{\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)}=-1$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}=0$.

$\lim_{x\to e}(1+\ln x)=2$ ، $\lim_{x\to e}(1-\ln x)=0$ و بما أن $1-\ln x>0$ من أجل $x<e$ و $1-\ln x<0$ من أجل $x>e$

فإن $\lim_{x\to e^{-}} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to e^{+}} f(x)=-\infty$.

2. الدالة f قابلة للاشتقاق على المجالين $]0;e[$ ، $]e;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;e[\cup]e;+\infty[$،

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(1-\ln x)-\left(-\frac{1}{x}\right)(1+\ln x)}{(1-\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}}{(1-\ln x)^2}=\frac{2}{x(1-\ln x)^2}$$

بما أن $x>0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجالين $]0;e[$ و $]e;+\infty[$.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

لـ دراسة دالة $\ln \circ u$

1. النهايات

لدراسة نهاية دالة $\ln \circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln(x-2)$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$ و بما أن $\lim\limits_{X\to 0}\ln X=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to 2}\ln(x-2)=-\infty$ أي $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=-\infty$
- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}\ln X=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x-2)=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

2. اتجاه التغيرات

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة و موجبة تماما على مجال I فإن للدالتين u و $\ln \circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

البرهان:

نعلم أن الدالة " $\ln$ " متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $\ln \circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال: نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln\left(\frac{3}{x-1}\right)$.

نلاحظ أن $f=\ln \circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $u(x)=\frac{3}{x-1}$.

بما ان الدالة u متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

3. المشتقة و دوال أصلية

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال I فإن:

- الدالة $\ln \circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I، $(\ln \circ u)'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.
- الدالة $x\mapsto \ln[u(x)]$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\frac{u'(x)}{u(x)}$ على I.

البرهان:

- يكفي تطبيق المبرهنة المتعلقة بمشتقة دالة مركبة.
- يكفي حساب مشتقة الدالة $x\mapsto \ln[u(x)]$.

مثال:

- مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\ln(x^2+x+1)$ هي $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$
- الدالة F حيث $F(x)=\ln(2x+1)$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x)=\frac{2}{2x+1}$ على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

elbassair.net

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)$
أدرس نهايتي الدالة f عند 1 و عند $+\infty$.

الحل:

- لدينا من جهة: $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=2$ و بما أن $\lim\limits_{X\to 2}\ln X=\ln 2$ فإن $\lim\limits_{x\to 1}\ln(x^2+1)=\ln 2$
و لدينا من جهة ثانية: $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=0$ و بما أن $\lim\limits_{X\to 0}\ln X=-\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to 1}\ln(x^2-1)=-\infty$
نستنتج مما سبق أن $\lim\limits_{x\to 1}\left[\ln(x^2+1)-\ln(x^2-1)\right]=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)=+\infty$. لدينا إذن حالة عدم التعيين.

من أجل كل x من $]1;+\infty[$، $f(x)=\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)$. بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)=1$ و علما أن $\lim\limits_{X\to 1}\ln X=0$

نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ $f(x)=x+3\ln(2x-1)$

1. أحسب $f'(x)$.
2. عين معادلة لـ (Δ) مماس المنحني (C) الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 1.

الحل:

1. من أجل كل x من $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$، $f'(x)=1+3\times\dfrac{2}{2x-1}=\dfrac{2x+5}{2x-1}$.
2. لدينا: $f(1)=1$ و $f'(1)=7$. لدينا $(\Delta):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و منه $(\Delta):y=7x-6$.

تمرين محلول3: نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ $f(x)=\dfrac{5x-1}{x^2-1}$

1. تحقق أنه من أجل كل x من $]1;+\infty[$، $f(x)=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}$.
2. عين دالة أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$.

الحل:

1. من أجل كل x من $]1;+\infty[$، $f(x)=\dfrac{5x-1}{x^2-1}=\dfrac{2(x+1)+3(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{x+1}$.
2. بوضع $u(x)=x-1$ و $v(x)=x+1$ يكون $u'(x)=1$ و $v'(x)=1$
و بالتالي يكون لدينا: $f(x)=2\times\dfrac{u'(x)}{u(x)}+3\times\dfrac{v'(x)}{v(x)}$

و بما أن من أجل كل x من $]1;+\infty[$، $u(x)>0$ و $v(x)>0$ فإن دالة أصلية للدالة f على $]1;+\infty[$ هي الدالة F حيث $F(x)=2\ln[u(x)]+3\ln[v(x)]$.

نجد هكذا $F(x)=2\ln(x-1)+3\ln(x+1)$

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

الأعمال الموجهة

دالة اللوغاريتم العشري

تعريف: دالة اللوغاريتم العشري هي الدالة التي نرمز إليها بالرمز" log " و المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ:

$$\log(x)=\frac{\ln x}{\ln 10}$$

1. أحسب $\log(1)$ ، $\log(10)$ ، $\log(0,1)$.
2. أحسب $\log\left(10^n\right)$ من أجل كل عدد صحيح نسبي n .
3. بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و b لدينا:

$$\log(ab)=\log(a)+\log(b) \quad \text{و} \quad \log\left(\frac{a}{b}\right)=\log(a)-\log(b)$$

4. أحسب المجموع $s=\log\frac{1}{2}+\log\frac{2}{3}+\log\frac{3}{4}+...+\log\frac{98}{99}+\log\frac{99}{100}$
5. استنتج اتجاه تغير الدالة log من اتجاه تغير دالة اللوغاريتم النيبيري " ln ".
6. أدرس نهايتي الدالة log عند 0 و عند $+\infty$ ثم شكل جدول تغيراتها.
7. أرسم في معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ المنحنى (C) الممثل للدالة log .(وحدة الأطوال $1cm$)
8. أحسب بالسنتيمتر محيط المستطيل $OABC$ حيث $A(x;0)$ ، $B(x;\log x)$ و $C(0;10).(x>0)$

خاصية: من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم N ، يوجد عدد طبيعي وحيد n بحيث: $10^n \le N < 10^{n+1}$
$n+1$ هو عدد الأرقام الموجودة في الكتابة العشرية للعدد الطبيعي N .

أمثلة: * إذا كان $N=312$ فإن $10^2 \le N < 10^3$ (عدد أرقام N هو 3).
* إذا كان $N=46002$ فإن $10^4 \le N < 10^5$ (عدد أرقام N هو 5).

1. ليكن N عددا طبيعيا غير معدوم.
   - بين أنه يوجد عدد طبيعي وحيد n بحيث: $n \le \log(N) < n+1$.
   - بين أن عدد الأرقام الموجودة في الكتابة العشرية للعدد الطبيعي N هو $1+E(\log N)$.

نذكر أن $E(x)$ هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x.

تطبيق:

2. ما هو عدد أرقام العدد الطبيعي 2006^{2007} ؟
3. نعتبر العدد الطبيعي N حيث: $N=3^{10518}$.
   - عين باستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log N$.
   - استنتج الحصر التالي: $10^{5018} \le N < 10^{5019}$.
   - حدد عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد N .

قدرة ذاكرة الحاسبات لا تسمح باعتبار أعداد كبيرة جدا بقدر العدد N .

elbassair.net

دراسة دالة تتضمن لوغاريتم نيبيري

الجزء الأول:

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=x^2-1+2\ln(x)$

1. أحسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل العدد 1 كحل وحيد لها في المجال $]0;+\infty[$.
4. استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\ln(x)-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$

1. أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2. أحسب $f'(x)$ ثم بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، لـ $f'(x)$ و $g(x)$ نفس الإشارة.
3. استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
4. ليكن (C) و (Γ) التمثيلين البيانيين للدالتين f و $\ln$ على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ حيث وحدة الأطوال هي $4cm$.

ادرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C) و (Γ) ثم أرسمهما.

دراسة متتالية تتضمن لوغاريتم نيبيري

(u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$u_0=a$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_n=\ln(u_n)$

الجزء الأول: نفرض $u_0=9$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $u_{n+1}=\sqrt{u_n}$

1. عين القيم المضبوطة لـ u_1، u_2 و u_3.
2. عبر بدلالة $\ln 3$ عن كل من v_0، v_1، v_2 و v_3.
3. بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها.
4. عبر عن v_n بدلالة n. ما هي نهاية المتتالية (v_n) ؟

الجزء الثاني: نفرض $u_0=1$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $\ln(u_{n+1})=-1+\ln(u_n)$

1. برهن أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{1}{e}$ ثم استنتج طبيعة المتتالية (u_n).
2. عبر عن u_n بدلالة n.
3. بين أن المتتالية (v_n) حسابية يطلب تحديد أساسها.
4. عبر بدلالة n عن المجموع S_n علما أن $S_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$.
5. استنتج بدلالة n عبارة $\ln(u_0\times u_1\times\ldots\times u_n)$.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

elbassair.net

البسيط في البكالوريا

موضوع محلول

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ بـ : $f(x)=x+2-\ln(x+2)$

1. احسب نهاية الدالة f عند -2 .

2. بملاحظة أن $f(x)=(x+2)\left(1-\frac{\ln(x+2)}{x+2}\right)$ ، وباستعمال النتيجة $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}=0$ ، عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

3. احسب مشتقة الدالة f ، ثم شكل جدول تغيرات f .

4. أ- بين أن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا واحدا α محصوراً بين 2 و 3 .

ب- باستعمال الحاسبة ، عين حصرا سعته 10^{-2} للعدد α .

5. نرمز بـ $(\mathscr{C})$ إلى منحنى الدالة f في معلم متعامد و متجانس. وحدة الأطوال $1cm$.

أ- عين معامل توجيه المماس T للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة التي فاصلتها2.

ب- ارسم T ، ثم المنحنى $(\mathscr{C})$.

حل مختصر

1. $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}-2} f(x)=+\infty$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

3. من اجل كل x من $]-2;+\infty[$ $f'(x)=1-\frac{1}{x+2}$

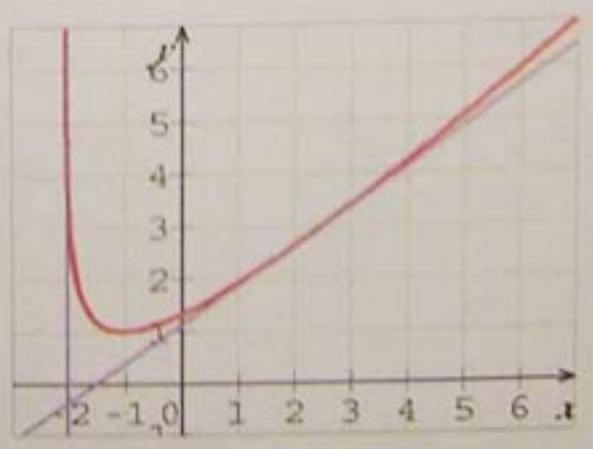
جدول التغيرات:

x	-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

4. أ- حسب جدول التغيرات ، الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على $[2;3]$.بما أن $f(2)\approx 2,6$ و $f(3)\approx 3,4$ و $f(x)$ تأخذ القيمة 3 في المجال $[2;3]$ فإن المعادلة $f(x)=3$ تقبل حلا واحدا α محصوراً بين 2 و 3 .

ب- باستعمال الحاسبة نلاحظ أن $f(2,50)\approx 2,99<3$ و $f(2,51)\approx 3,003>3$

5.أ- معامل توجيه المماس T للمنحنى $(\mathscr{C})$ عند النقطة التي فاصلتها2 هو $f'(2)=\frac{3}{4}$

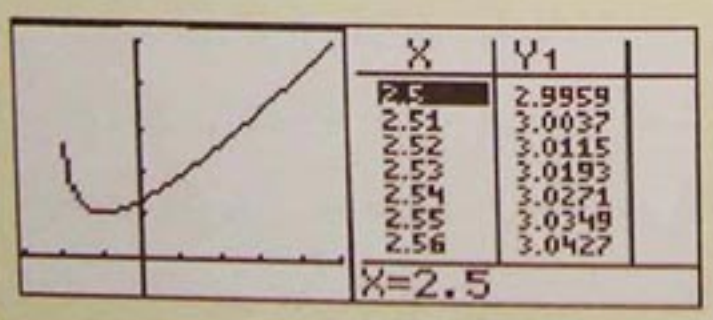


تعاليق

عند حساب النهايات ، بين جميع المراحل للحصول على النتيجة.

• عند حساب المشتقة لا نكتفي بإعطاء النتيجة الواردة في النص . نطبق مشتق الدالة $\ln\circ u$ و مشتق مجموع دالتين.

• لدراسة إشارة f' ، اعلم أن إشارة $(ax+b)(cx+d)$ هي نفس إشارة $\frac{ax+b}{cx+d}$



• معادلة المماس هي :

$y=f'(2)(x-2)+f(2)$

elbassair.net

موضوع مع إرشادات

I . يعطى جدول تغيرات دالة f قابلة للاشتقاق على $]-3;+\infty[$

x	-3	-2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0 ↗	2

نرمز بـ g إلى الدالة المعرفة على $]-2;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=\ln[f(x)]$$

1.أ- عين اتجاه تغير الدالة g على $]-2;+\infty[$.

ب- عين نهاية g عند -2 وعند $+\infty$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة g .

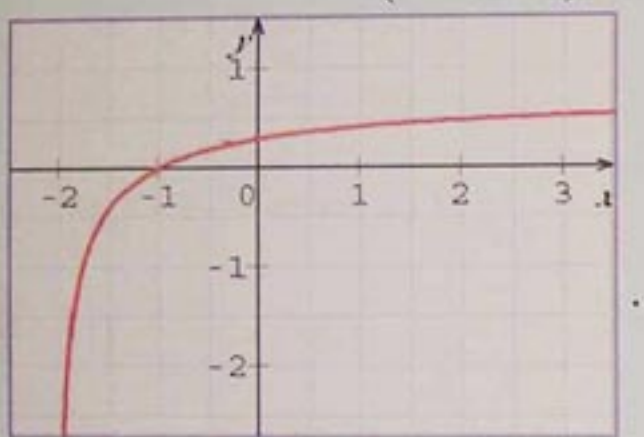
2.لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على المجال $]-3;+\infty[$ و التي تحقق $F(-2)=0$

بين أن الدالة F تقبل قيمة حدية صغرى عند -2.

II. في هذا الجزء الدالة f هي الدالة المعرفة على $]-3;+\infty[$ بـ: $f(x)=2-\dfrac{2}{x+3}$

1.باستعمال عبارة $f(x)$ ، جد من جديد المعلومات المتوفرة في جدول تغيرات f في الجزء **I** .

2. كما في السؤال 1 من الجزء **I** ، نعرف الدالة g على $]-2;+\infty[$ بـ: $g(x)=\ln\left(2-\dfrac{2}{x+3}\right)$



ليكن $\mathcal{C}_g$ المنحنى الممثل لدالة g في معلم متعامد و متجانس.

(انظر الشكل المقابل)

أ. هل المنحنى $\mathcal{C}_g$ يقبل مستقيمات مقاربة؟ برّر .

إذا كان الجواب نعم، أعط معادلات لهذه المستقيمات ثم مثلها في الشكل.

ب. المنحنى $\mathcal{C}_g$ يقطع محور الفواصل في نقطة A ، باستعمال عبارة $g(x)$ عين إحداثيات النقطة A و مثلها في الشكل.

جـ- عين معادلة المماس T للمنحنى $\mathcal{C}_g$ عند النقطة التي فاصلتها -1 .ارسم المماس T في الشكل.

3. كما في السؤال 2 من الجزء **I** ، نعرف الدالة F بـ :

F هي الدالة الأصلية على المجال $]-3;+\infty[$ للدالة $f:x\mapsto 2-\dfrac{2}{x+3}$ و $F(-2)=0$

احسب $F(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من $]-3;+\infty[$.

إرشادات

I . 1. أ. الدالة g متزايدة على المجال $]-2;+\infty[$.

ب . استعمل نهاية مركب دالتين.

2. $F'(x)=f(x)$ و $f(-2)=0$ ، لاحظ إشارة $f(x)$ من جدول التغيرات.

II . 1. تحقق من النهايات و إشارة المشتقة للدالة f .

2.أ. المنحنى يقبل مستقيمين مقاربين ، للتبرير ارجع إلى التفسير الهندسي للنهايات.

ب. حل المعادلة $g(x)=0$

جـ. استعمل العبارة الجبرية لمعادلة المماس عند فاصلة النقطة A.

3. استعمل: الدالة الأصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{h'(x)}{h(x)}$ هي الدالة $x\mapsto\ln|h(x)|$

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

تمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ دالة اللوغاريتم النيبيري

1 عين مجموعة تعريف الدالتين f و g المعرفتين كما يلي: $f(x)=\ln(x+1)$ و $g(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

2 تحقق أن الدالة f معرفة على المجموعة المعطاة

1) $f(x)=(2x-3)\ln(x-1)$ على $]1;+\infty[$.

2) $f(x)=x^2+1-\ln(x^2)$ على $\mathbb{R}^*$

3) $f(x)=3+\ln(3-x)$ على $]0;3[$

• في لتمرينين **3** و **4** في كل حالة من الحالات المقترحة عين مجموعة تعريف الدالة f

3

1) $f(x)=\ln(x^2-1)$

2) $f(x)=\ln(x-1)^2$

3) $f(x)=\ln x+\ln(x+2)$

4) $f(x)=\ln\left(\frac{2-x}{x^2}\right)$

4

1) $f(x)=\frac{\ln x}{x-1}$

2) $f(x)=\frac{1-x^2}{x}+x\ln x$

3) $f(x)=x^2+1-\ln(4+x)$

4) $f(x)=x+\ln\left(\frac{3-x}{x+2}\right)$

5) $f(x)=\ln(2x-1)+\ln(x^2-4)$

5 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\ln(x)=\ln(2x-3)$

2) $\ln(x^2-1)=\ln(x+5)$

3) $\ln\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)=0$

6 حل المتراجحات التالية:

1) $\ln(3x)<\ln(4x+8)$

2) $\ln(x^2)<\ln(3x-2)$

3) $\ln(2x^2)>\ln(6-4x)$

4) $\ln(x^2+x-2)>0$

7 عين حسب قيم x إشارة $\ln(2x+5)$

8 عين حسب قيم x إشارة $\ln(2x^2+x-3)$

9 عين حسب قيم x إشارة $\ln\left(\frac{x+1}{2-x}\right)$

2 ـ الخواص الجبرية

10 اكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية:

1) $\ln 14-\ln 7$ ؛ 2) $\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{2}{3}$ ؛

3) $\frac{\ln 100}{\ln 10}$ ؛ 4) $\ln(10000)+\ln(0,01)$ ؛

5) $e^{\ln 5}+e^{-\ln 3}$ ؛ 6) $e^{1+\ln 2}$ ؛ 7) $e^{-2\ln 3}$.

11 بسط ما يلي :

• $A=\ln e^3-\ln e^2$ • $B=\ln\left(e\sqrt{e}\right)$

• $C=\ln 2+\ln(8e)-\ln\left(4e^2\right)$

• $D=\ln\left(\frac{1}{e}\right)^2-\ln^2\left(\frac{1}{e}\right)$

12 اكتب الأعداد التالية على شكل $\ln x$:

• $A=3\ln 2-\ln 5+\frac{1}{2}\ln 8$

• $B=2\ln(0,1)-3\ln(0,01)+\ln 2$

• $C=2\ln(100)-\ln\left(\frac{1}{10}\right)$

13 اكتب الأعداد التالية على شكل $\ln x$:

• $A=\ln a-\ln b+2\ln c$

• $B=\frac{1}{2}\ln a-\frac{3}{2}\ln b+\ln\frac{a}{b}$

• $C=\ln(a+1)-\frac{1}{2}\ln b+\frac{3}{2}\ln(a+b)$

14 اكتب على شكل مجموع أو فرق ما يلي :

• $A=\ln(1400)$ • $B=\ln(2500000)$

15 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $2\ln(x-3)=\ln 4$

2) $\ln x+\ln(x-1)=\ln 2+\ln 3$

3) $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$

4) $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$

elbassair.net

5) $\ln x+\ln(4-x)=\ln(2x-1)+\ln 3$

6) $\ln(x+1)=-1+\ln(x-1)$

16 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $\ln(x-1)-\ln 3>\ln 2-\ln(x+4)$

2) $\ln(x^2-2x)>\ln(4x-5)$

3) $\ln x+\ln(x+1)\le\ln(x^2-2x+2)$

4) $\ln(35-8x)\ge 3\ln 2+\ln(x)^2$

17 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة التالية:

1) $\ln(x-1)+\ln(x-2)>2\ln(5-x)$

18 ادرس إشارة العبارات الجبرية التالية على $]0;+\infty[$

1) $\ln x-\ln 3$ 2) $(\ln x+1)(\ln x-1)$

3) $\ln x(\ln x-1)$ 4) $2x\ln(1-x)$

5) $-x^2\ln(x+1)$

19 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة:

$\ln(2x+2)-\ln(x-1)=\ln x+\ln 2$

20 نعتبر كثير الدود p للمتغير الحقيقي x حيث:

$p(x)=x^4-25x^2+144$

1) حل $\mathbb{R}$ المعادلة $p(x)=0$

2) استنتج حل المعادلة:

أ) $(\ln x)^4-25(\ln x)^2+144=0$

ب) $[\ln(\ln x)]^4-25[\ln(\ln x)]^2+144=0$

21 حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية:

$$\begin{cases} x^2+2y=16 \\ \ln\dfrac{x}{y}+=-\ln 3 \end{cases}$$

22 1) حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية:

$$\begin{cases} 4x+y=5 \\ 8x-4y=4 \end{cases}$$

2) استنتج حل الجملة التالية في $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \ln x^4y^7-2\ln y^3=5 \\ \ln\dfrac{x^6}{y^4}+\ln x^2=4 \end{cases}$$

23 1) حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية:

$$\begin{cases} \ln(x+1)^4+\ln y=0 \\ \ln x^2+\ln\dfrac{1}{y}=\ln x \end{cases}$$

24 عين أصغر عدد طبيعي n في الحالات التالية:

أ) $\left(\frac{1}{2}\right)^n\le 0,02$ ب) $0,8^n\le 0,01$

ج) $(1,2)^n\ge 1040$ د) $21000(1+0,035)^n\ge 30000$

25 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدها الأول $u_0=2$ وأساسها $\frac{3}{2}$.

ابتداءً من أية رتبة تكون حدود المتتالية أكبر من 10^5 ؟

26 $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية حدها الأول $v_0=6$ وأساسها $\frac{1}{5}$.

عين قيم n التي يكون من أجلها $v_n\ge 2\times 10^{20}$.

27 وضع رأسمال قدره $20000\ DA$ بفائدة ثابتة قدرها 11% .بعد كم سنة يكون المبلغ الموفر هو 50000 DA ؟

28 يتزايد سكان مدينة ما بنسبة 2,5% .إذا افترضنا أن هذه النسبة تبقى ثابتة و أن سكان هذه المدينة سنة 1988 هي P فبعد كم سنة يتم مضاعفة هذا العدد؟

مثال: يقدر عدد سكان العالم حاليا بخمسة ملايير نسمة، فبعد كم سنة يضاعف هذا العدد علما أن نسبة التزايد هي 2,5% تقريبا؟

3 - دراسة دالة اللوغاريتم النيبيري

29 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$

ادرس نهايات الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

30 f دالة معرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{\ln x}$$

ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

31 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=2(\ln x)^2-\ln x-3$$

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

تمارين

1. ادرس نهاية الدالة f عند 0.

2. من اجل $x>1$ ، ضع $\ln x$ كعامل مشترك في $f(x)$ ، ثم عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

• في التمارين من **32** إلى **35** احسب النهايات في كل حالة من الحالات المقترحة:

32 أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\ln x$ ؛ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)\ln x$

ج) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3-2\ln x$ ؛ د) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x+5-\ln x$

33 أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{3+\ln x}$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\ln\left(x^2\right)}$

جـ) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3-x)\ln x$ د) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x^2-x\right)\ln(-x)$

34 أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2+\ln x)$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln 2-3\ln x)$

جـ) $\lim\limits_{x\to+\infty} x-4+\ln x$ د) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x-4+\ln x$

35 أ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (3(\ln x)^2-\ln x)$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-(\ln x)^2)$

جـ) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \dfrac{1+2\ln x}{x}$ د) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} x^2+\ln x-1$

36 f دالة معرفة على $]e;+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$

1. بين انه من أجل كل $x>e$ ، $f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{\ln x}+1}{\dfrac{1}{\ln x}-1}$

2. عين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

37 عين النهايات للدالة f عند حدود مجموعة التعريف في كل حالة من الحالتين التاليتين:

أ) $f(x)=2x^2+\ln x$ معرفة على $]0;+\infty[$

ب) $f(x)=-1+2\ln x-(\ln x)^2$ معرفة على $]0;+\infty[$

• في التمرينين **38** و **39** حدد مجموعة التعريف و مجموعة قابلية الاشتقاق ثم احسب المشتقة $f'(x)$ للدوال f المعطاة:

38 1) $f(x)=2x+1+\ln x$ 2) $f(x)=\dfrac{1}{x}+\ln x$

3) $f(x)=2x^2-\ln x$ 4) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$

5) $f(x)=(\ln x)^2+\ln x-2$ 6) $f(x)=x\ln x$

7) $f(x)=-x+\ln 2+\ln x$ 8) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

39 1) $f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$

2) $f(x)=2x(1-\ln x)$

3) $f(x)=-\dfrac{x}{2}+1+2\ln x$

4) $f(x)=\dfrac{e}{\ln x}$

5) $f(x)=\dfrac{x-\ln x}{x}$

6) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}(3-\ln x)$

40 تحقق من أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال المعطى ثم احسب دالتها المشتقة

1) $f(x)=(\ln x)^2+\ln x$ ، $D=]0;+\infty[$

2) $f(x)=x^2\ln x-\dfrac{x^2}{2}$ ، $D=]0;+\infty[$

3) $f(x)=x\ln|x|-2x+3$ ، $D=]-\infty;0[$

4) $f(x)=-\dfrac{x}{2}+x\ln x$ ، $D=]0;+\infty[$

5) $f(x)=\dfrac{x+1}{\ln x-1}$ ، $D=]e;+\infty[$

41 نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=x^2-1+2\ln x$$

عين معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 1.

42 نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=1-\ln x-x$$

عين معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها e .

43 نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=\frac{e}{\ln x}+2x$$

عين معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها e .

elbassair.net

تمارين

3. استنتج نهايتي الدالة g حيث $g(x)=\ln\left(\frac{x+4}{x+3}\right)$ عند 3− و عند ∞+.

52 نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]1;+\infty[$ كما يلي: $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

1. عين إشارة $f(x)$ على $]1;+\infty[$.
2. ادرس نهايتي الدالة f عند 1 و عند ∞+.
3. استنتج نهايتي الدالة g حيث $g(x)=\ln\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$ عند 1 و عند ∞+.

53 عين النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ؛ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}1}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-1}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\left(x^2+2x\right)$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln\left(x^2+2x\right)$ ؛ $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}-2}\ln\left(x^2+2x\right)$

$\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1}\ln x+\ln(1-x)$ ؛ $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\ln x+\ln(1-x)$

54 عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

1) $f(x)=2x+1-\ln(x+1)$ المعرفة على $]-1;+\infty[$

2) $f(x)=\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}\right)$ المعرفة على $]0;+\infty[$.

3) $f(x)=x-\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ المعرفة على $]1;+\infty[$.

• في التمرينين **55** و **56** ، حدد مجموعة التعريف و مجموعة قابلية الاشتقاق ثم احسب المشتقة $f'(x)$ للدوال f المعطاة:

55

1) $f(x)=1-x+\ln(x+1)$

2) $f(x)=\frac{1}{2}\ln(x+2)$

3) $f(x)=\frac{\ln(x-1)}{x}$

4) $f(x)=x\ln(2x-1)$

56

1) $f(x)=\ln(1-x)+\ln(2x+1)$

2) $f(x)=x+\ln\left(\frac{2}{x}\right)$

3) $f(x)=-\ln(x^2+x+1)$

4) $f(x)=(x-1)\ln(x-1)+x$

57 تحقق من أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال المعطى ثم احسب دالتها المشتقة

1) $f(x)=(x+1)\ln(2x-1)-x$ على $\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$

2) $f(x)=\frac{x^2}{2}\ln(x+1)$ على $]-1;+\infty[$

3) $f(x)=\ln\left(\frac{2x+1}{1-x}\right)$ على $\left]-\frac{1}{2};1\right[$

4) $f(x)=x\ln(x^2+1)$ على $\mathbb{R}$

5) $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{\ln x}$ على $]0;1[$

58 نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]-\infty;\frac{5}{2}\right[$ بـ :

$f(x)=\ln(5-2x)+\ln 2$

- احسب العدد المشتق للدالة f عند 2.
- استنتج معادلة المماس للمنحنى الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها 2.

59 لتكن الدالة f المعرفة على $]-2;+\infty[$ بـ:

$f(x)=3\ln(2+x)+x^2-3x$

بين أن المنحنى C الممثل للدالة f يقبل مماسين موازيين لمحور الفواصل.

60 ادرس تغيرات الدالة f على المجال المعطى وذلك باستعمال اتجاه تغير مجموع دالتين

1) $f(x)=x^2-1+\ln(x-1)$ على $]1;+\infty[$

2) $f(x)=\ln(2-x)-\ln(2+x)$ على $]-2;2[$

3) $f(x)=-\frac{1}{x}+\ln x$ على $]0;+\infty[$

4) $f(x)=-\sqrt{x-1}-\ln(x-1)$ على $]1;+\infty[$

5) $f(x)=\frac{x}{x-1}-\ln(x-1)$ على $]1;+\infty[$

• في التمرينين **61** و **62** ، ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجال المعطى.

61

1) $f(x)=\ln(2x-8)$ على $]4;+\infty[$

2) $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)$ على $]1;+\infty[$

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

3) $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$ على $]1;+\infty[$

62 1) $f(x)=x^2-4+\ln(x-2)$ على $]2;+\infty[$

2) $f(x)=\frac{1}{x-4}+\ln(1-2x)$ على $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$

3) $f(x)=\ln(2-x)-\ln(2+x)$ على $]-2;2[$

63 عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية F و التي تحقق شرطا معينا

1) $f(x)=\frac{1}{2x+1}$ ، $x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ و $F(0)=0$

2) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ، $x\in]-\infty;-3[$ و $F(1)=1$

3) $f(x)=\frac{-2x+1}{x^2-x-2}$ ، $x\in]-1;2[$ و $F(0)=1$

64 نعتبر الدالة f المعرفة على $]2;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{2x-1}{x^2-x-2}$$

1.تحقق أنه من أجل كل x من $]2;+\infty[$ ،

$$f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}.$$

2.استنتج دالة أصلية للدالة f على $]2;+\infty[$.

65 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;2\}$ بـ :

$f(x)=\frac{5x^2+14x}{x^2-x-2}$. $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1;2\}$ ،

$$f(x)=5+\frac{16}{x-2}+\frac{3}{x+1}.$$

2.استنتج دالة أصلية للدالة f على $]2;+\infty[$.

3.احسب بوحدة المساحات ،مساحة الحيز لمجموعة النقط $M(x;y)$ حيث $-4\le x\le -3$ و $0\le y\le f(x)$

66 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1\}$ بـ :

$$f(x)=\frac{x^2+x+4}{x+1}$$

1.عين الأعداد الحقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل x من $\mathbb{R}-\{-1\}$ ، $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.

2.ادرس تغيرات الدالة f .

3.أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

4. عين دالة أصلية للدالة f على $]-1;+\infty[$.

5. احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيمات التي معادلاتها $y=0$ ، $x=1$ و $x=3$

67 احسب التكاملات التالية:

1) $\int_{-1}^{2}\frac{3}{x+2}dx$ 2) $\int_{1}^{2}\frac{x^2+x-2}{x^2}dx$

3) $\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}dx$ 4) $\int_{1}^{e}\frac{(\ln x)^2}{x}dx$

68 نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $]0;+\infty[$ بـ :

$f(x)=\frac{x^2}{2}-\ln x$ و $g(x)=x\ln x-x$

1.احسب مشتقة الدالة g .

2.استنتج دالة أصلية F للدالة f على $]0;+\infty[$.

3.احسب $\int_{1}^{e}f(x)dx$.

69 1. عين مشتقة الدالة g المعرفة على $]0;4[$ بـ :

$g(x)=(x-4)\ln(4-x)-x\ln x$.

2.استنتج قيمة التكامل $\int_{1}^{2}\ln\left(\frac{4-x}{x}\right)dx$.

5- دالة اللوغاريتم العشري

70 نعتبر العدد الطبيعي n حيث $n=2^{1234}$

1.عين باستعمال حاسبة الجزء الصحيح للعدد $\log n$.

2.استنتج الحصر التالي: $10^{371}\le n<10^{372}$.

3.حدد عدد الأرقام في الكتابة العشرية للعدد n .

71 علما أن $\log(3,81)\approx 0,58092$ ، استنتج بدون باستعمال الحاسبة قيمة مقربة لكل من الأعداد التالية:

$\log(381)$ ، $\log(0,381)$ ، $\log(3,81\times10^{-3})$.

72 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $\log x=5$ ؛ 2) $\log x=-3$ ؛ 3) $\log x=0,01$

73 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $\log x>4$ 2) $\log x<-10$

3) $\log x\ge 0,1$ 4) $\log x<\log(1-x)$

elbassair.net

تمارين

تمارين للتعمق

74 بكالوريا

الجدول الموالي يمثل جدول تغيرات الدالة

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x \ln x}$ المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$

نسمي C التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$-e$	↘	‖ $-\infty$	↘	$+\infty$ ↘ 0

1) من خلال المعطيات في جدول التغيرات برر ما يلي:

إشارة $f'(x)$ ، النهايات للدالة f عند حدود مجموعة التعريف ،صورة $\frac{1}{e}$ بالدالة f .نقبل أن $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x = 0$

2) كم يقبل المنحني C من مستقيم مقارب ؟عين معادلة لكل من مستقيم من هذه المستقيمات.

3) أ) عين معادلة المماس لمنحي C عند النقطة A التي فاصلتها $\frac{1}{e}$

ب) عين معادلة المماس لمنحي C عند النقطة B التي فاصلتها e .

4) اذكر من أجل أي قيم للعدد k المعادلة $f(x)=k$:

أ) لا تقبل أي حل ؟

ب) تقبل حلا وحيدا ؟

ج) تقبل حلين متمايزين ؟

(لا يعطى أي تبرير للإجابة على هذا السؤال، يمكن الاستعانة بالتمثيل البياني للدالة f من خلال الحاسبة البيانية)

75 الهدف من هذا التمرين إثبات أن:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=0$$

الجزء1: دراسة دالة

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\ln x-\sqrt{x}$$

1) احسب $f'(x)$ و بين أن $f'(x)=\dfrac{2-\sqrt{x}}{2x}$

2) استنتج جدول تغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$ (حساب النهايات غير مطلوب)

3) برر إذن أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$: $\ln x<\sqrt{x}$

الجزء2: استعمال مبرهنة المقارنة

1) بين انه من أجل كل عدد حقيقي $x>1$:

$$0<\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$$

2) عين $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)$

نذكر أن مشتقة الدالة $x\mapsto\sqrt{x}$ هي $x\mapsto\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

76 البرهان أن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x\ln x)=0$

- تحقق أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ $x\ln x=-\dfrac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

- استعمل المبرهنة حول نهايات الدوال المركبة للدالتين $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ و $x\mapsto\dfrac{\ln x}{x}$ و نتيجة التمرين السابق ، لتعيين نهاية $x\ln x$ لما x يؤول إلى 0 .

77 بكالوريا

لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x)=-x^3-3x^2+20$$

1) ادرس تغيرات الدالة g.احسب $g(2)$.عين مجموعة قيم x بحيث يكون $g(x)>0$

2) نعتبر الدالة h المعرفة على $I=]-\infty;2[$ بـ:

$$h(x)=\ln\left(-x^3-3x^2+20\right)$$

أ) باستعمال السؤال 1) بين أن الدالة h معرفة جيدا على I

ب) عين نهايات الدالة h عند2 و عند $-\infty$

ج) شكل جدول تغيرات الدالة h .

د) بين أن المعادلة $h(x)=2$ تقبل حلا واحدا α ينتمي إلى المجال $]-2;2[$.

هـ) عين قيمة مقربة لـ α إلى 10^{-2} بالنقصان.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

78 لتكن الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـــ :

$$f(x)=x+1+2[\ln x-\ln(x-1)]$$

نسمي $(\mathscr{C})$ إلى التمثيل البياني لدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس.الوحدة $1cm$

1.بين أنه من أجل كل $x\in\ ]1;+\infty[$:

$$f(x)=x+1+2\ln\frac{x}{x-1}$$

2.عين نهايات الدالة f عند حدود مجموعة التعريف.

3.ادرس اتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

4.احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]$.استنتج أن المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ يطلب تعيين معادلة له .

ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة إلى المستقيم Δ .

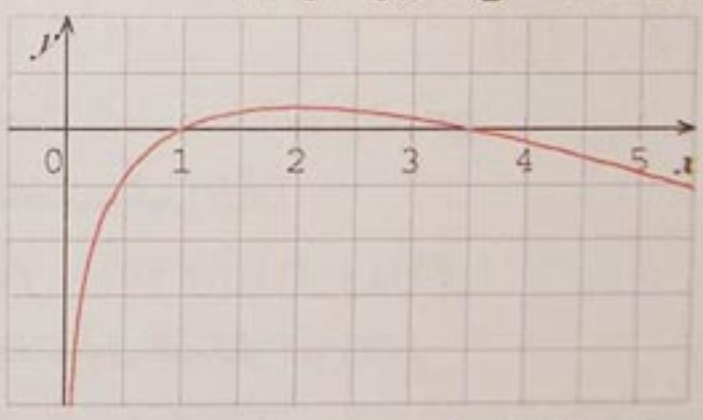
5. ارسم بعناية المنحني $(\mathscr{C})$.

79 بكالوريا

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;5]$ بـــ :

$$f(x)=1-x+2\ln x$$

الشكل التالي هو التمثيل البياني $(\mathscr{C})$ للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد .الوحدة $2cm$ على محور الفواصل و $5cm$ على محور التراتيب.



1.احسب نهاية f عند 0 .

2. احسب $f'(x)$ و ادرس تغيرات f .

3. أ- احسب $f(1)$.

ب- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على المجال $[3;4]$ حلا واحدا α ، ثم أعط قيمة مقربة بالزيادة إلى 10^{-2} للعدد α .

جـــ- استنتج إشارة $f(x)$ حسب قيم x.

3. نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;5]$ بـــ :

$$g(x)=x\left(-\frac{1}{2}x+2\ln x-1\right)$$

أ- بين أن g هي دالة أصلية للدالة g على $[0;5]$.

ب- في الشكل ، نعتبر الحيز المحدد بمحور الفواصل و جزء المنحني $(\mathscr{C})$ الواقع فوق محور الفواصل

بين أن المساحة A لهذا الحيز مقدرة بوحدة المساحات هي $g(\alpha)-g(1)$.

جـــ- احسب قيمة مقربة للمساحة A بـــ cm^2 .(استعمل القيمة المقربة لـــ α المحصل عليها في السؤال2.ب)

80 بكالوريا

نعلم أن المنحني $\mathscr{C}_f$ الممثل لدالة f معرفة على $]-2;+\infty[$ يشمل النقط $O(0;0)$ و $A(-1;0)$ ، و أن المماس لـــ $\mathscr{C}_f$ عند O معامل توجيهه $\ln 2$ و المماس لـــ $\mathscr{C}_f$ عند A معادلته $y=x+1$.

1.أ- باستعمال هذه المعطيات ، عين $f(0)$ ، $f'(0)$ ، $f(-1)$ و $f'(-1)$.

ب- عين معادلة المماس لـــ $\mathscr{C}_f$ عند O .

2. علما أنه يوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c بحيث من أجل كل $x>-2$ ، $f(x)=(ax^2+bx+c)\ln(x+2)$

أ- عبر عن $f(0)$ بدلالة a ، b و c .

ب- عبر عن $f'(x)$ بدلالة a ، b و c .

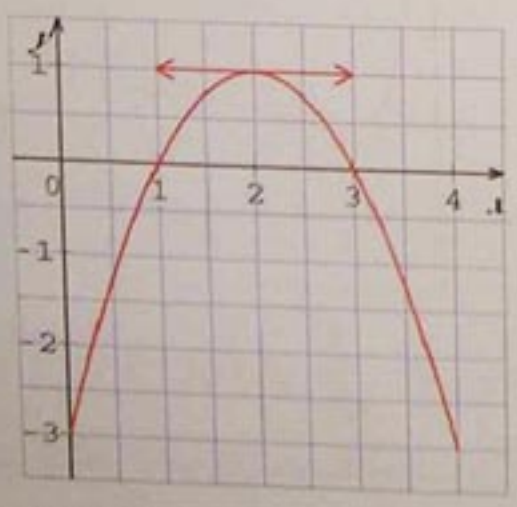
جـــ- استنتج $f'(0)$ و $f'(-1)$ بدلالة a ، b و c .

د- استنتج a ، b و c .

81 بكالوريا

لتكن u دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على $[0;4]$

الشكل التالي هو التمثيل البياني $(\mathscr{C})$ للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس.



المنحني يشمل النقط التي إحداثياتها $(0;-3)$ ، $(1;0)$ ، $(2;1)$ ، $(3;0)$ و $(4;-3)$ و يقبل في النقطة التي

elbassair.net

فاصلتها 2 مماسا يوازي محور الفواصل.

1. بدون تبرير

أ- شكل جدول تغيرات الدالة u ، مبينا إشارة u'

ب- شكل جدولا تبين فيه إشارة الدالة u على $[0;4]$

2. نعتبر الدالة f المعرفة بـ : $f = \ln \circ u$ (مركب الدالة u متبوعة بالدالة $\ln$)

مبررا إجابتك ، اذكر إن كانت الخواص التالية صحيحة أو خاطئة

أ- f معرفة على $[0;4]$.

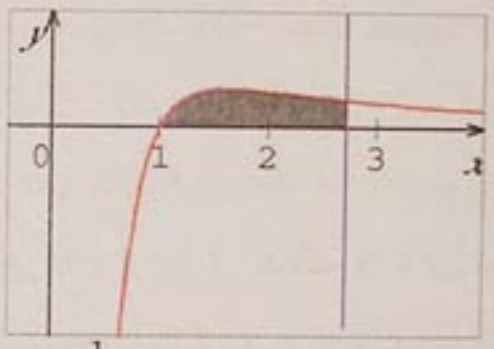
ب- f موجبة أو تنعدم على مجموعة تعريفها.

جـ- $f'(2) = 0$.

د-المستقيم الذي معادلته $x = 1$ مقارب لمنحني الدالة f .

82 بكالوريا

الشكل المقابل هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$

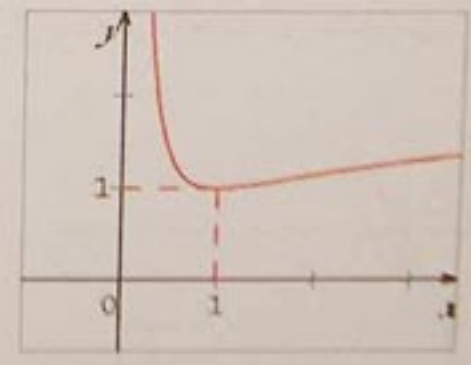


الشكل (1)

1.أ- بين أن الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى $\dfrac{1}{2e}$ عند $x = \sqrt{e}$.

ب- عين إشارة $f(x)$ على $]0;+\infty[$.

2. F دالة أصلية للدالة f ممثلة بالمنحني التالي:



الشكل (2)

وهي تحقق $F(e) = \dfrac{2e-2}{e}$ و $F(\sqrt{e}) = 2 - \dfrac{3}{\sqrt{e}}$

أ- هل تغيرات الدالة F تتوافق مع نتائج السؤال 1.ب ؟ برر الجواب.

ب- أعط ، معامل توجيه مماس منحني الدالة F عند النقطة التي فاصلتها $\sqrt{e}$ مع التبرير.

جـ- عبر ، بوحدة المساحات ، عن مساحة الجزء المظلل في الشكل (1).

د- الدالة G المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $G(x) = \dfrac{-1-\ln x}{x}$ هي دالة أصلية للدالة f .

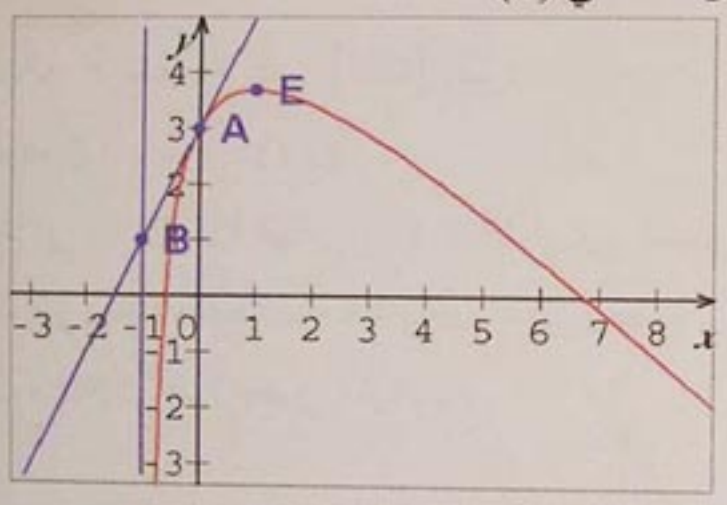
عبر عن $F(x)$ بدلالة x من أجل $x \in]0;+\infty[$.

83 بكالوريا

الجزء1: لمستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس، $(\mathscr{C})$ هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على $]-1;+\infty[$

ننشئ النقط $A(0;3)$ ، $B(-1;1)$ ، $E(1;3+\ln 2)$.

المستقيم (AB) مماس عند A للمنحني $(\mathscr{C})$ ، و Δ المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ عند E .



1. باستعمال المعلومات المتوفرة، عين:

أ- معادلة للمستقيم (AB) .

ب- $f(0)$ ، $f'(0)$ ، $f(1)$ و $f'(1)$.

جـ- عدد حلول المعادلة $f(x) = 1$.

د- جدول تغيرات الدالة f .

2. نقبل أن الدالة f على $]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = ax + 5 + \frac{b}{x+1} + \ln(x+1)$$

حيث a و b عددان حقيقيان .

احسب a و b باستعمال $f(0)$ و $f(1)$.

الجزء2: نقبل أن الدالة f على $]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{-x^2+4x+3}{x+1} + \ln(x+1)$$

1. عين نهاية f عند -1 .أعط تفسيرا هندسيا.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

2. أ- بين أن $f'(x)=\dfrac{-x^2-x+2}{(x+1)^2}$

ب- ادرس إشارة $f'(x)$.

جـ- هل النتيجة تتوافق مع الجدول الذي أنجزته في السؤال 1.د

د- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا على $]0;+\infty[$،أعط قيمة مقربة إلى 10^{-3} لهذا الحل .

4. أ- احسب مشتقة الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$

استنتج دالة أصلية للدالة f على $]-1;+\infty[$.

ب- احسب $\int_0^1 f(x)\,dx$ ، أعط تفسيرا هندسيا .

84 بكالوريا

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=\frac{2(1+\ln x)}{x}$$

1.أ- حل في $]0;+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$ (احسب القيمة المضبوطة للحل ثم القيمة المدورة إلى 10^{-3})

ب- حل في $]0;+\infty[$ المتراجحة $f(x)>0$ .2. فيما يأتي يعطى جدول تغيرات الدالة f كما يلي:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↘	0

3. في مؤسسة ، نمذجنا بالدالة f على $[0,2;+\infty[$ " الفائدة الشهرية المحققة من بيع x وحدة مصنوعة (x مقدر بالآلاف) و الفائدة مقدرة بآلاف الدنانير

باستعمال النتائج السابقة ، أجب عن الأسئلة التالية:

أ- ما هو العدد الأدنى للوحدات التي تبيعه المؤسسة شهريا حتى تكون الفائدة موجبة؟

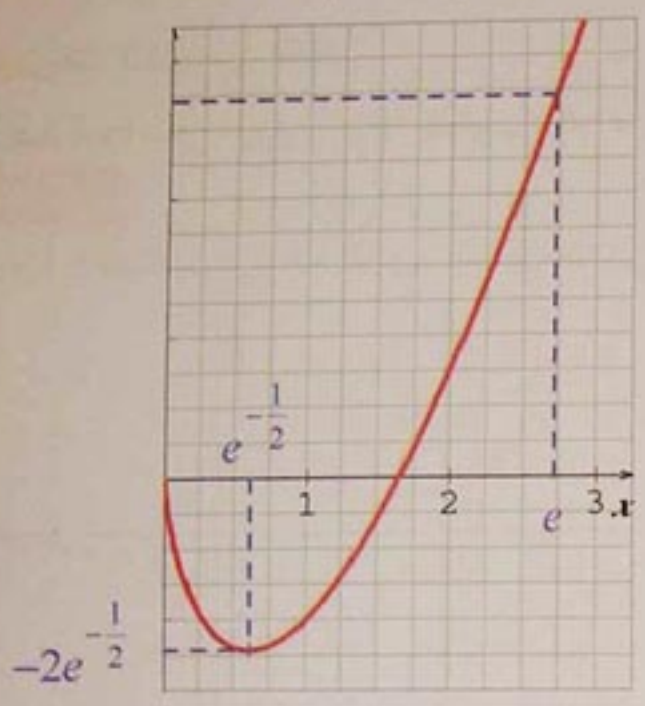
ب-كم يجب بيع من الوحدات لتحقيق فائدة قصوى؟ و ما هي قيمة هذه الفائدة؟

85 بكالوريا

لتكن الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=2x\ln x-x$$

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة $2cm$



الجزء A : دراسة الدالة f

1)أ) عين $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (تعطى $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$)

ب) عين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (يمكن وضع x كعامل مشترك)

2) بين أن : $f'(x)=2\ln x+1$

3) ادرس إشارة $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) احسب إحداثيات النقطة A نقطة تقاطع المنحني (C)مع محور الفواصل.مثل النقطة A في الشكل.

الجزء B : دراسة وضعية المنحني بالنسبة إلى أحد مماساته

1) بين أن معادلة المماس (Δ) للمنحني (C) عند النقطة A هي : $y=2x-2\sqrt{e}$.مثل المستقيم (Δ) في الشكل.

2) لتكن الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=f(x)-\left(2x-2\sqrt{e}\right)$

أ) احسب $g'(x)$

ب) باستعمال جدول تغيرات الدالة g بين أن $g(x)\geq 0$ على $]0;+\infty[$

استنتج أن المنحني (C)أعلى (Δ) على $]0;+\infty[$

الجزء C : حساب مساحة

elbassair.net

تمارين

لتكن الدالة H المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ :

$$H(x)=x^2\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)$$

1) احسب $H'(x)$

2) احسب القيمة المضبوطة لـ: .

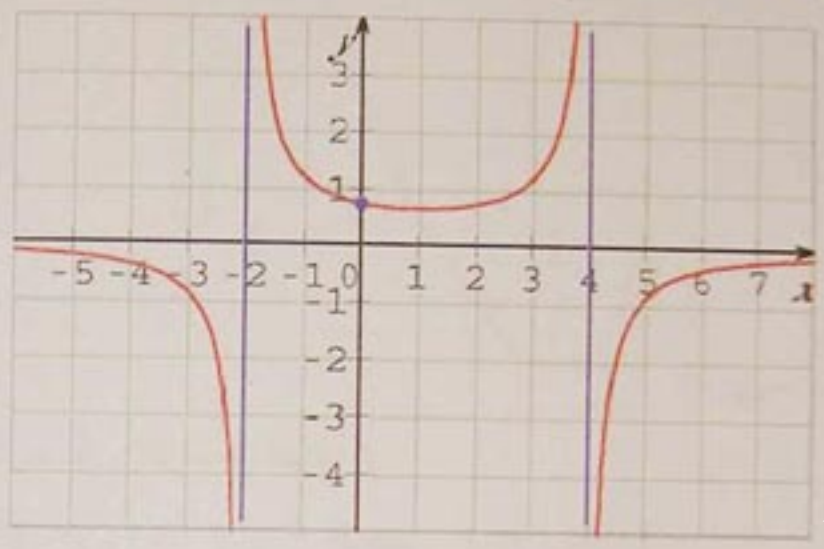
هذا التكامل يرفق بحساب مساحة حيز من المستوي.

أ) لون هذا الحيز في الشكل.

ب) أعط قيمة مقربة إلى 10^{-2} بالنقصان لهذه المساحة

86 بكالوريا

الجزء 1 : نستعمل في هذا الجزء التمثيل البياني لدالة f



1) ادرس إشارة $f(x)$ لما x يختلف عن -2 و عن 4

2) نعرف الدوال f_1 ، f_2 ، f_3 كما يلي:

$$f_1(x)=\frac{4}{-x^2+2x+8}\text{ ، }f_2(x)=\frac{6}{-x^2+2x+8}$$

$$f_3(x)=\frac{6}{x^2-6x+8}$$

عين الدالة f من بين هذه الدوال علما أنها واحدة من هذه الدوال.

يمكن أن نهتم بالقيم التي تعدم المقام و كذلك بالقيمة $f(0)$

الجزء2: لتكن الدالة g المعرفة على $]-4;2[$ بـ:

$$g(x)=\ln\left(\frac{x+2}{4-x}\right)$$

نسمي $(\mathscr{C})$ إلى التمثيل البياني لدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس.الوحدة $3cm$

1) دراسة g:

أ) احسب نهايات الدالة g عند حدود مجال تعريفها.

• استنتج وجود مستقيمات مقاربة للمنحني $(\mathscr{C})$.

ب) احسب g' مشتقة الدالة g .

• بعد التعرف على g' بأنها إحدى الدوال f_1 ، f_2 أو f_3 على المجال $]-4;2[$ ، ادرس تغيرات g .

ج) عين معادلة للمماس T للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة I التي فاصلتها 1 .

د) ارسم T و $(\mathscr{C})$.

2) المستقيم الموازي لمحور التراتيب الذي معادلته $x=3$ يقطع T في A ، $(\mathscr{C})$ في B و محور الفواصل في D

أ) احسب بـ cm^2 مساحة المثلثين IAD و IBD .

ب) نرمز بـ Δ إلى المساحة بـ cm^2 لحيز المستوي المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$ ،محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=3$.

نقبل أن القوس من المنحني بحيث الفواصل x تكون من المجال $[1;3]$ يكون داخل المثلث IAB .

• اعط حصرا للمساحة Δ .

ج) نعتبر الدالة G المعرفة على $[1;3]$ بـ:

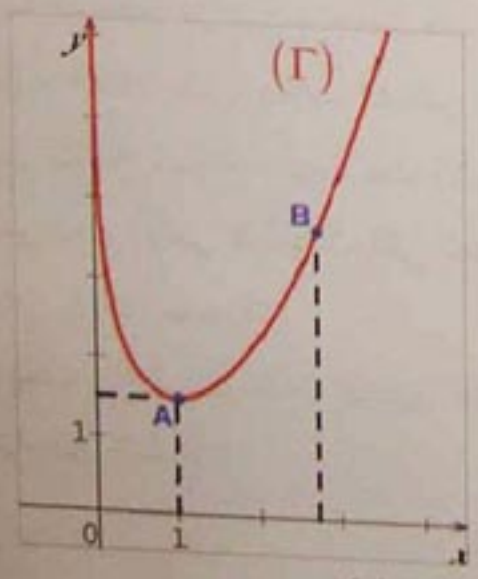
$$G(x)=(x+2)\ln(x+2)-(x-4)\ln(4-x)$$

-احسب $G'(x)$.

-احسب $\int_1^3 \ln\left(\frac{x+2}{4-x}\right)dx$ ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ Δ.

87 بكالوريا

الجزء A : المنحني (Γ) في الشكل المقابل هو التمثيل البياني في معلم متعامد لدالة g معرفة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$. النقطتان $A\left(1;\frac{3}{2}\right)$ و $B\left(e;\frac{e^2}{2}\right)$ تنتميان إلى المنحني (Γ) و المماس عند A للمنحني (Γ) يوازي محور الفواصل



1) عين $g(1)$ ، $g(e)$ و $g'(1)$

elbassair.net

2) عين العددين الحقيقيين a و b علما أن الدالة g معرفة على $]0;+\infty[$ بعبارة من الشكل:

$$g(x)=\frac{x^2}{2}+a+b\ln x$$

3) علما أن $g(x)=\frac{x^2}{2}+1-\ln x$ ، جد باستعمال الحساب اتجاه تغير الدالة g (لا يطلب حساب النهايات)

• استنتج إشارة $g(x)$ على $]0;+\infty[$

الجزء B : نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ:

$$f(x)=\frac{\ln x}{x}+\frac{x}{2}$$

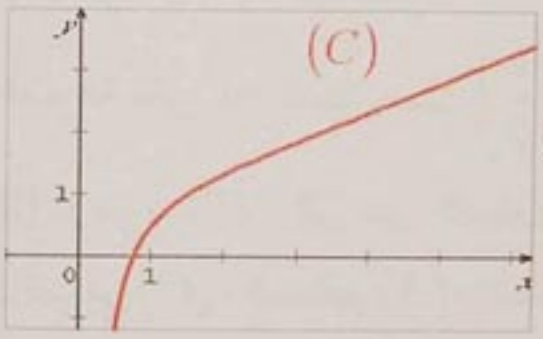
1) احسب نهايات الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

(نقبل أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$)

2) احسب المشتقة f' للدالة f.

تحقق أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما .استنتج تغيرات f.

3) بين أن المنحنى (C) الممثل للدالة f يقبل مستقيمين مقاربين يطلب تحديدهما.



(المنحنى (C) معطى في الشكل المقابل في معلم متعامد و متجانس الوحدة $2cm$)

4) نقبل وجود عدد حقيقي α من المجال $\left[\frac{1}{2};1\right]$ حيث $f(\alpha)=0$.ماذا يمثل α بالنسبة للمنحنى (C)؟مثل على المنحنى (C) النقطة I التي فاصلتها α.

بين أن $\ln\alpha=-\frac{\alpha^2}{2}$.استنتج أن $f'(\alpha)=\frac{1+\alpha^2}{\alpha^2}$

الجزء C :

1) احسب مشتقة الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ:

$$h(x)=(\ln x)^2$$

2) استنتج حساب $\int_1^e\left(\frac{\ln x}{x}\right)dx$

3) شطب في الشكل المعطى حيز المستوي المحدد بالمنحني (C) ،محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=e$ ين المساحة (بـــ) لهذا الحيز.

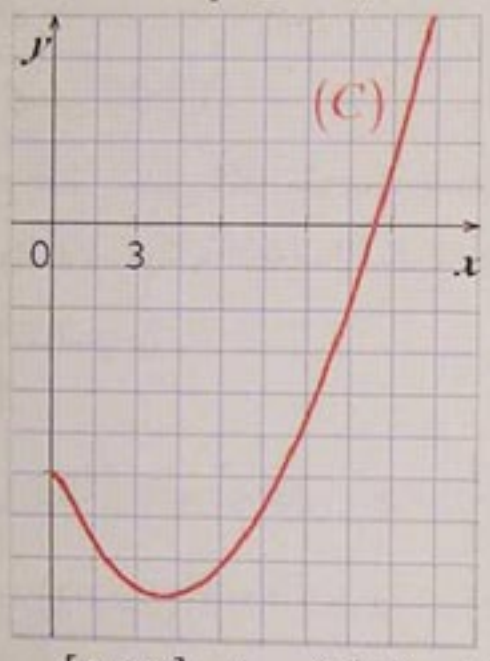
88 بكالوريا

الجزء A :

لتكن الدالة f المعرفة على $[0;50]$ بـــ:

$$f(x)=x^2+\frac{50x}{x+1}-50\ln(x+1)-50$$

المشتقة $f'(x)$ تساوي $\frac{2x(x-4)(x+6)}{(x+1)^2}$.المنحني (C) الممثل للدالة f معطى في الشكل المقابل



1) ادرس إشارة $f'(x)$ على $[0;50]$

2) شكل جدول تغيرات f على $[0;50]$.نقبل أن $f(x)$ تنعدم من أجل قيمة واحدة α من المجال $]0;50[$ ،. استنتج إشارة $f(x)$ على المجال $[0;50]$

3) أعط حصرا للعدد α بعددين طبيعيين متتابعين .

في الجزء المتبقي من المسألة نأخذ α هو القيمة الصغرى من بين هاتين القيمتين .

الجزء B:

مؤسسة تنتج كمية x (مقدرة بالكيلوغرام kg) من منتوج معين الكلفة الهامشية C مقدرة بالدينار معرفة على $[0;50]$ بـــ: $C(x)=2x+\frac{50}{x+1}$

elbassair.net

1) دالة الكلفة الإجمالية C_T هي الدالة الأصلية للدالة C على المجال $[0;50]$ و التي تأخذ 50 من أجل $x=0$ تحقق من أن $C_T(x)=x^2+50\ln(x+1)+50$

2) الكلفة المتوسطة هي الدالة C_m المعرفة على $]0;50]$ بـــ: $C_m(x)=\dfrac{C_T(x)}{x}$

أ) أعط عبارة $C_m(x)$ بدالة x .

ب) تحقق أن مشتقة C_m يمكن وضعها على الشكل $C'_m(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$

الجزء C:

1) استنتج من النتائج السابقة جدول تغيرات الدالة C_m على المجال $]0;50]$

2) ارسم في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ التمثيل البياني للدالة C_m على $[1;50]$

3) ما هو الإنتاج الذي يعطي كلفة متوسطة صغرى؟ احسب إذن الكلفة الإجمالية و الكلفة الهامشية المرفقة بالكلفة المتوسطة الصغرى

89 بكالوريا

الجزء A : لتكن الدالة f المعرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـــ:

$f(x)=-x+7+6\ln(2x+1)-6\ln(2x+2)$

نرمز بـــ (C) إلى التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) برر أن f معرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

2) عين نهاية الدالة f عند $-\frac{1}{2}$.استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا (D) يطلب تعيين معادلة له.

3) بملاحظة أنه من أجل كل x من $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$6\ln(2x+1)-6\ln(2x+2)=6\ln\left(\dfrac{2x+1}{2x+2}\right)$

عين نهاية الدالة f عند $+\infty$

4) ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته $y=-x+7$

أ) ما هي نهاية $[f(x)-(-x+7)]$ عندما يؤول x إلى $+\infty$؟ أعط تفسيرا هندسيا.

ب) ادرس وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

5) أ) بين أنه من أجل كل x من $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$: $f'(x)=\dfrac{-2x^2-3x+5}{(2x+1)(x+1)}$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

ب) ادرس إشارة f' و شكل جدول تغيرات f .

6) ليكن T المماس للمنحني (C) عند النقطة M التي فاصلتها0 .عين معادلة للمستقيم T .

7) ارسم المستقيمات (D)، (Δ) ، T و المنحني (C) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة $2cm$

الجزء B:

1) لتكن H الدالة المعرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـــ:

$H(x)=(2x+1)\ln(2x+1)-(2x+2)\ln(2x+2)$

بين أن الدالة H هي دالة أصلية على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ للدالة h المعرفة على هذا المجال بـــ: $h(x)=2\ln\left(\dfrac{2x+1}{2x+2}\right)$

2) نرمز بـــ (E) إلى حيز المستوي المحدد بالمنحني (C)، المستقيم (Δ)و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=2$ و $x=5$

أ) شطب (E) في الشكل.

ب)احسب القيمة المضبوطة لمساحة (E)مقدرة بوحدة المساحات.

ج) احسب مساحة (E) بـــ cm^2 (تعطى النتيجة على شكل قيمة مقربة إلى 0,01)

90 بكالوريا

مؤسسة تنتج كمية x من الوحدات الإنتاجية ، مقدرة بآلاف الأطنان .

الكلفة الإجمالية للإنتاج معطاة من أجل كل $x\in[0;5]$ بـــ:

$C_T(x)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{9}{2}\ln(x+1)$

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

الكلفة مقدرة بمئات الآلاف من الدنانير

الجزء A : دالة مساعدة:

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;5]$ بـــ :

$$f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{9x}{x+1}-9\ln(x+1)$$

1.احسب $f'(x)$

تحقق أنه يمكن كتابة $f'(x)$ على الشكل:

$$f'(x)=\frac{x(x-2)(x+4)}{(x+1)^2}$$

2.شكل جدول تغيرات الدالة f على $[0;5]$.

3.استنتج أن f تنعدم على $[0;5]$ من أجل قيمة واحدة α

4.باستعمال الحاسبة البيانية،عين حصرا سعته 10^{-3} لـــ α.

5.استنتج من النتائج السابقة إشارة f على $[0;5]$.

الجزء B : دراسة الكلفة المتوسطة C_M:

الدالة " الكلفة المتوسطة " C_M معرفة على $[0;5]$ بـــ :

$$C_M(x)=\frac{x}{4}+\frac{9}{2}\frac{\ln(x+1)}{x}.$$

1.احسب $C'_M(x)$.

تحقق أن $C'_M(x)=\frac{f(x)}{2x^2}$ حيث f هي الدالة المعرفة في الجزء A .

2.ادرس اتجاه تغير C_M على $[0;5]$.

3.من أجل أي إنتاج للمؤسسة تكون كلفتها المتوسطة صغرى، مقدرة بالدنانير للطن ؟ ما هي هذه الكلفة؟

91 بكالوريا

المستوي منسوب إلى معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$ ومتجانس، الوحدة $\frac{1}{4}cm$ على محور الفواصل و $4cm$ على محور التراتيب.

الجزء A : نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;60]$ بـــ :

$$g(x)=\frac{x-8}{10(x+2)}$$

و ليكن Γ تمثيلها البياني في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ- أحسب مشتقة الدالة g .

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة g .

جـــ- عين إحداثيات Γ نقط تقاطع مع محور التراتيب، ثم مع محور الفواصل.

د- عين إشارة الدالة g على $[0;60]$.

2. بين أن المنحني Γ يقبل في نقطة واحدة A مماسا موازيا للمستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{9}x+10$

3. أ- تحقق أنه من أجل كل x من $[0;60]$:

$$g(x)=\frac{-1}{x+2}+\frac{1}{10}$$

ب عين دالة أصلية للدالة g على $[0;60]$.

جـــ- احسب العدد $\int_{10}^{20} f(x)\,dx$ حدّد ماذا يمثل هذا العدد هندسيا؟

الجزءB: نعتبر الدالة B المعرفة على $[0;60]$بـــ :

$$B(x)=0,1x-\ln(x+2)-1$$

1. أ-بين أن الدالة B تقبل الاشتقاق على $[0;60]$.

ب- بين أنه من أجل كل $x\in[0;60]$: $B'(x)=g(x)$

جـــ- شكل جدول تغيرات الدالة B .

2. أ-بين أن المعادلة $B(x)=0$ تقبل حلا واحد في المجال $[49;50]$.نرمز بـــ α إلى هذا الحل.

ب- عين قيمة مقربة إلى 0,1 بالزيادة لـــ α.

جـــ- استنتج من الأسئلة1.جـــ) و 2.أ) أن المعادلة $B(x)=0$ تقبل حلا واحدا وواحدا فقط على $[0;60]$.

د- ارسم منحني الدالة B في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الجزءC : مؤسسة تنتج يوميا x سيارة $(x\in[0;60])$ بكلفة إجمالية مقدرة بملايين الدنانير معطاة بـــ:

$$C(x)=0,2x+\ln(x+2)+1$$

كل سيارة تنتج تباع بسعر $300000DA$.نسمي $R(x)$ الدخل الإجمالي لبيع x سيارة.

1. عبر عن $R(x)$ بدلالة x .

2. احسب $R(x)-C(x)$ بدلالة x .ماذا يمثل هذا الفرق؟

3.عين العدد الأدنى من السيارات التي تصنع حتى تكون المؤسسة ذات مردودية.

4. من أجل أي إنتاج يومي للسيارات تكون خسارة المؤسسة قصوى؟

elbassair.net

اختيار من متعدد

كل سؤال يتضمن 5 أجوبة ، إجابة واحدة على الأقل صحيحة تعرّف على الإجابات الصحيحة

92 لتكن الدوال f ، g و h للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ:

$$f(x)=\ln(x-2)\ ،\ g(x)=\ln(x^2+1)\ \ h(x)=\frac{x}{\ln x}$$

أ) $f(x)$ و $g(x)$ لهما معنى من أجل كل عدد حقيقي x .

ب) $h(x)$ لها معنى إذا كان $x>0$.

جـ) $f(3)=0$.

د) $h(e)=e$.

هـ) من أجل كل $x>2$: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ln\dfrac{x-2}{x^2+1}$

93 تبسيط العبارات

أ) $\ln 2+\ln\dfrac{1}{2}-\ln e^{-2}=2$

ب) $\ln(3)^2+\ln 3-\ln\sqrt{3}=2\ln 3$

جـ) $\dfrac{\ln e^{-2}}{\ln e^{-1}}-\ln 2e=1-\ln 2$

د) $\ln 125-\ln 81-\ln\dfrac{3}{5}+2\ln\sqrt{243}=4\ln 5-\ln 3$

هـ) $\ln\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^{142}\right]+\ln\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{142}\right]=0$

94 معادلات و متراجحات

أ) $\ln(x+1)=\ln(2x+3)$ تقبل 2- كحل وحيد.

ب) $(x+2)\ln(x+2)$ تقبل 1- كحل وحيد.

جـ) $\ln\dfrac{x+1}{x-3}\geq 0$ تقبل كمجموعة حلول المجال $]3;+\infty[$.

د) $(\ln x)^2-2\ln x-3=0$ تقبل e^3 كحل وحيد.

هـ) $1+\ln(2-x)\geq 0$ تقبل كمجموعة حلول $]-\infty;2[$.

95 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=x+\dfrac{2\ln x}{x}$

أ) f قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $g(x)=x^2+2+2\ln x$

ب) على $]0;+\infty[$ إشارة g' هي إشارة $x-1$.

جـ) على $]0;+\infty[$ g تقبل قيمة حدية عظمى تساوي 3.

د) f متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

هـ) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α حيث $\alpha\in\ ]1;2[$

صحيح أم خاطئ

96 اذكر إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة مع تبرير الجواب

1) مجموعة حلول المتراجحة $x\ln(0,2)-5\geq 0$ هي: المجال $\left]-\infty;\dfrac{5}{\ln(0,2)}\right]$.

2) إذا كانت f دالة معرفة و موجبة تماما على $\mathbb{R}$ حيث $f'(x)=x-2$ فإن الدالة $\ln f$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

3) المنحنى الممثل للدالة $\ln$ يقبل مماسا معامل توجيهه 3 عند النقطة $A\left(\dfrac{1}{3};-\ln 3\right)$.

4) -4 هو حل للمعادلة $\ln(4-x)-\ln(x+6)=\ln 6$.

5) $\ln(x^2-y)=2\ln x-\ln y$

97 هل الخواص التالية صحيحة أم خاطئة(دون تبرير)

1) الدالة $f:x\mapsto\ln(2-x)$ معرفة على $]2;+\infty[$

2) الدالة $f:x\mapsto\ln(-2x)$ متناقصة تماما على $]-\infty;0[$

3) إذا كانت $f(x)=\ln(3-3x)$ على $]-\infty;1[$ فإن :

$$f'(x)=\frac{1}{x-1}$$

4) إذا كانت الدالة f متزايدة تماما و موجبة على مجال D فإن $\ln f$ متناقصة على D .

5) إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق و موجبة على مجال D فإن $\left(\ln|f|\right)'=-\dfrac{f'}{f}$

98 أجب بصحيح أم خاطئ مع التبرير

1) الدالة $f:x\mapsto\ln\left(x^2-1\right)$ متناقصة تماما على $]1;+\infty[$.

2) المعادلة $\ln x^2=\ln(3x+4)$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$.

3) الدالة $F:x\mapsto\dfrac{1}{2x-1}$ المعرفة على $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ أصلية للدالة $f:x\mapsto\dfrac{1}{2}\ln(2x-1)$.

4) إذا كانت $f(x)=x\ln x$ فإن $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}$.

5) دالة أصلية للدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln x-1$ هي الدالة F المعرفة على $]0;+\infty[$ $F(x)=\dfrac{1}{x}-x$.

elbassair.net

7 الدالة الأسية 7

الكفاءات المستهدفة

- تعريف الدالة الأسية.
- معرفة خواص الدالة الأسية .
- استعمال حاسبة لحساب قيم دوال أسية.
- حساب نهايات تتضمن دوال أسية.
- دراسة دوال من الشكل $\exp \circ u$.

نمو جذر نبات

قام المعهد الوطني للبحث في الفلاحة بمراقبة نمو جذور نبتة الفول و لخص نتائج الملاحظات في الجدول التالي:

t	0	2	4	6	8	9	10
y	1	4	37	50	80	82	83

يرمز t إلى عدد الأيام بينما يرمز y إلى طول الجذر بالميليمتر.

1) مثّل المعطيات في معلم متعامد (2cm على محور الفواصل و 0,2cm على محور التراتيب).

2) قدم الباحث روبارتسون نموذجا يربط نمو الجذور بعدد الأيام وفق الدالة $\ln\left(\frac{y}{85-y}\right)=0,9(t-2)$

أ) عبر عن t بدلالة y و لتكن h الدالة التي ترفق t بـ y

ب) أدرس تغيرات الدالة h و مثلها بيانيا .

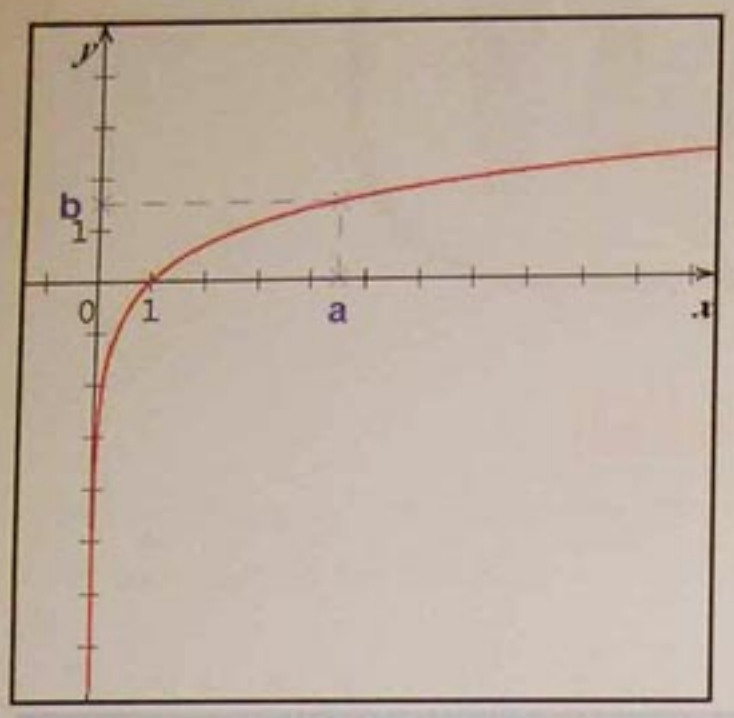
ج) لكن الذي يهم الباحثين هو عبارة y بدلالة t.

- عبر عن y بدلالة t و لتكن k الدالة التي ترفق y بـ t
- أدرس تغيرات k و مثلها بيانيا.
- هل نموذج روبارتسون مناسب ؟

لن تجد أية صعوبة في نهاية الفصل للإجابة عن الأسئلة السابقة .

elbassair.net

النشاط الأول



دالة اللوغاريتم النيبيري مستمرة و متزايدة تماما على $]0;+\infty[$

و لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$$

إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة، من أجل كل عدد حقيقي b من $\mathbb{R}$ يوجد عدد حقيقي وحيد a من $]0;+\infty[$ بحيث $\ln(a)=b$.

بوضع $a=\exp(b)$ نكون قد عرفنا هكذا دالة جديدة.

تعريف: تسمى هذه الدالة " الدالة الأسية " و نرمز إليها بالرمز " exp ".

لدينا إذن: من أجل كل a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل b من $\mathbb{R}$، $\ln(a)=b$ يعني $a=\exp(b)$

1) حساب بعض الصور

- أحسب الأعداد التالية: $\exp(0)$، $\exp(1)$، $\exp(2)$ و $\exp(3)$.
- عين قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد $\exp(2)$.
- بين أن $\exp(-2)=\dfrac{1}{\exp(2)}$ ثم استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد $\exp(-2)$.

2) التمثيل البياني

نعتبر في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المنحنيين (C) و (C') الممثلين على التوالي للدالتين " exp " و" ln ".

- ماذا يمكن القول عن النقطتين $M_1(x;y)$ و $M_1'(y;x)$ حيث x، y عددان حقيقيان.
- b عدد حقيقي و a عدد حقيقي موجب تماما.بين أن النقطة $M(a;b)$ تنتمي إلى المنحني (C') إذا وفقط إذا كانت النقطة $M'(b;a)$ تنتمي إلى المنحني (C).
- ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنيين (C) و (C') ؟
- أرسم المنحني (C') ثم المنحني (C) في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.
- بين أن من أجل كل a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل b من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$\exp[\ln(a)]=a \quad \text{و} \quad \ln[\exp(b)]=b$$

3) وضع تخمينات

- خمن إشارة $\exp(x)$.
- خمن اتجاه تغير الدالة " exp " على $\mathbb{R}$.
- خمن نهايتي الدالة " exp " عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

النشاط الثاني

1. نعتبر العددين a ، b حيث $a=13,5$ و $b=4,8$

- باستعمال حاسبة أحسب المجموع $a+b$ ثم $\exp(a+b)$.
- باستعمال حاسبة أحسب $\exp(a)$، $\exp(b)$ ثم الجداء $\exp(a)\times\exp(b)$.
- قارن بين العددين $\exp(a+b)$ و $\exp(a)\times\exp(b)$.

2. باستعمال مجدول و علما أن رمز الدالة الأسية هو " EXP "

- أنجز و اتمم و رقة الحساب الموالية:

	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	a+b	EXP(a)	EXP(b)	EXP(a)*EXP(b)	EXP(a+b)
2	2	3	5	7,389056099	20,08553692		
3	3,1	3,7					
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20	21,8	15,6					

- ضع تخمينا.
- جرب صحة تخمينك من أجل قيم مختلفة للعددين a و b.

النشاط الثالث

فرضية: نفرض وجود دالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث:

$f(0)=1$ و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=f(x)$

1. عين علاقة تربط بين g و g' في كل حالة من الحالات التالية:

- $g:x\mapsto f(3x)$
- $g:x\mapsto f(-x)$
- $g:x\mapsto\dfrac{1}{f(x)}$

2. نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $g(x)=f(-x)\times f(x)$

- من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،أحسب $g'(x)$. ماذا تستنتج ؟
- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)\neq 0$.
- بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$.

elbassair.net

لـ الدالة الأسية

1. تعريف

تعريف: الدالة الأسية التي نرمز لها بالرمز " exp " هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي ترفق بكل x من $\mathbb{R}$ العدد الحقيقي الموجب تماما y حيث $x=\ln(y)$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $]0;+\infty[$ ، $y=\exp(x)$ يعني $x=\ln(y)$

2. الرمز e^x

خاصية: من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\ln(e^n)=n$

البرهان: من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا: $\ln(e^n)=n\ln(e)=n$

لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\exp(n)=e^n$.

اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x، إلى $\exp(x)$ بـ e^x.

من أجل كل عدد حقيقي x ، $\exp(x)=e^x$

تقرأ e^x: " أسية x ".

3. بعض خواص الدالة الأسية

من التعريف و باستعمال الترميز e^x نستنتج الخواص التالية:

خواص:

(1) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^x>0$.

(2) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $]0;+\infty[$ ، $y=e^x$ يعني $x=\ln(y)$.

(3) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\ln(e^x)=x$.

(4) من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $e^{\ln(x)}=x$.

أمثلة:

- لدينا $\ln(1)=0$ و منه $e^0=1$.
- لدينا $\ln(e)=1$ و منه $e^1=e$.

خواص أخرى: من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا:

(5) $e^a=e^b$ يعني $a=b$.

(6) $e^a<e^b$ يعني $a<b$.

البرهان:

- $e^a=e^b$ يعني $\ln(e^a)=\ln(e^b)$ أي $a=b$.
- $e^a<e^b$ يعني $\ln(e^a)<\ln(e^b)$ أي $a<b$.

ملاحظة: الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

تمرين محلول1: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$(1)\ e^{x^2+3x-3}=e^{2x-1}$ و $(2)\ e^{5x+3}>e^{3x-1}$

طريقة: المعادلة $e^{u(x)}=e^{v(x)}$ تعني $u(x)=v(x)$.

المتراجحة $e^{u(x)}>e^{v(x)}$ تعني $u(x)>v(x)$.

الحل:

(1) تعني $x^2+3x-3=2x-1$ أي $x^2+x-2=0$ و لهذه المعادلة الأخيرة حلان هما 1 و -2.

مجموعة حلول المعادلة (1) هي إذن $S=\{-2;1\}$.

(2) تعني $5x+3>3x-1$ أي $x>-2$.

مجموعة حلول المتراجحة (2) هي إذن $S=]-2;+\infty[$.

تمرين محلول2: حل المعادلة و المتراجحتين التالية:

$(1)\ e^{2x-1}=3$ ، $(2)\ e^{x+2}\geq -5$ ، $(3)\ e^{x+2}\geq 3$

طريقة:

- لحل المعادلة $e^{u(x)}=\lambda$ حيث $\lambda>0$ يكفي حل المعادلة $u(x)=\ln(\lambda)$.
- لحل المتراجحة $e^{u(x)}\geq\lambda$ حيث $\lambda>0$ يكفي حل المتراجحة $u(x)\geq\ln(\lambda)$.

الحل:

(1) تعني $2x-1=\ln 3$ أي $x=\frac{1+\ln 3}{2}$. مجموعة الحلول هي إذن $S=\left\{\frac{1+\ln 3}{2}\right\}$.

من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^{x+2}>0$ و منه $e^{x+2}>-5$. مجموعة حلول المتراجحة (2) هي إذن $S=\mathbb{R}$.

(3) تعني $x+2\geq\ln 3$ أي $x\geq\ln(3)-2$. مجموعة الحلول هي إذن $S=[\ln(3)-2;+\infty[$.

تمرين محلول3: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$(1)\ \ln(2x-1)=2$ و $(2)\ \ln(2x-1)\leq 2$

طريقة: لحل المعادلة $\ln[u(x)]=\lambda$ على التوالي المتراجحة $\ln[u(x)]\leq\lambda$ نقوم أولا بتعيين D مجموعة الأعداد الحقيقية التي تكون الدالة u معرفة من أجلها مع $u(x)>0$ ثم نحل في المجموعة D المعادلة $u(x)=e^{\lambda}$ على التوالي $u(x)\leq e^{\lambda}$.

الحل: D هي مجموعة الأعداد الحقيقية x بحيث $2x-1>0$ أي $x>\frac{1}{2}$ و منه $D=\left]\frac{1}{2};+\infty\right[$.

من أجل كل x من D، (1) تعني $2x-1=e^2$ أي $x=\frac{e^2+1}{2}$. مجموعة الحلول هي إذن $S=\left\{\frac{e^2+1}{2}\right\}$.

من أجل كل x من D، (2) تعني $2x-1\leq e^2$ أي $x\leq\frac{e^2+1}{2}$. مجموعة الحلول هي إذن $S=\left]\frac{1}{2};\frac{e^2+1}{2}\right]$.

elbassair.net

ـ الخواص الجبرية

1. الخاصية الأساسية

خاصية: من أجل كل عددين حقيقيين a و b ، $e^{a+b}=e^a e^b$.

البرهان:

لإثبات أن $\alpha=\beta$ مع $\alpha>0$ و $\beta>0$ يكفي أن نثبت أن $\ln\alpha=\ln\beta$.

الأعداد e^a ، e^b و e^{a+b} موجبة تماما.

لدينا من جهة $\ln\left(e^{a+b}\right)=a+b$ و لدينا من جهة ثانية $\ln\left(e^a e^b\right)=\ln\left(e^a\right)+\ln\left(e^b\right)=a+b$

و منه $\ln\left(e^{a+b}\right)=\ln\left(e^a e^b\right)$. إذن $e^{a+b}=e^a e^b$.

نقول عن الدالة الأسية أنها تحول مجموع إلى جداء.

أمثلة: $e\times e^x=e^{x+1}$ ، $e^{x^2-2}=e^{x^2}\times e^{-2}$.

ملاحظة: يتم تعميم هذه النتيجة إلى عدة أعداد حقيقية و هكذا يكون لدينا:

من أجل كل أعداد حقيقية a_1، a_2، ...، a_n، $e^{a_1+a_2+\ldots+a_n}=e^{a_1}e^{a_2}\ldots e^{a_n}$.

2. نتائج

نتيجة1: من أجل كل عددين حقيقيين a و b،

$e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$ و $e^{a-b}=\dfrac{e^a}{e^b}$.

البرهان:

* من أجل كل عدد حقيقي a لدينا:

$e^a\times e^{-a}=e^{a-a}=e^0=1$ و بالتالي $e^{-a}=\dfrac{1}{e^a}$

* من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا:

$$e^{a-b}=e^{a+(-b)}=e^a\times e^{-b}=e^a\times\frac{1}{e^b}=\frac{e^a}{e^b}$$

أمثلة: $e^{2x-3}=\dfrac{e^{2x}}{e^3}$ ، $\dfrac{e^{2x-5}}{e^{x+1}}=e^{(2x-5)-(x+1)}=e^{x-6}$.

نتيجة2: من أجل كل عدد حقيقي a و من أجل كل صحيح نسبي n، $\left(e^a\right)^n=e^{na}$.

البرهان:

العددان $\left(e^a\right)^n$ و e^{na} موجبان تماما.

لدينا من جهة: $\ln\left[\left(e^a\right)^n\right]=n\ln\left(e^a\right)=na\ln(e)=na$ و لدينا من جهة ثانية: $\ln\left(e^{na}\right)=na\ln(e)=na$.

و منه $\ln\left[\left(e^a\right)^n\right]=\ln\left(e^{na}\right)$. إذن $\left(e^a\right)^n=e^{na}$.

أمثلة: $e^{2x}=\left(e^x\right)^2$ ، $e^{3x}=\left(e^x\right)^3$.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

تمرين محلول1: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$e^{x+2}e^{2x-3}=5 \quad (1) \qquad \text{و} \qquad e^{-2x+1}>\frac{1}{2}e^{-x+1} \quad (2)$$

الحل:

1. (1) تعني $e^{(x+2)+(2x-3)}=5$ أي $e^{3x-1}=5$ و هذا يعني $3x-1=\ln 5$ أي $x=\frac{1+\ln 5}{3}$

مجموعة حلول المعادلة (1) هي إذن: $S=\left\{\frac{1+\ln 5}{3}\right\}$

2. (2) تعني $\frac{e^{-2x+1}}{e^{-x+1}}>\frac{1}{2}$ لأن $e^{-x+1}>0$ لدينا: $\frac{e^{-2x+1}}{e^{-x+1}}=e^{(-2x+1)-(-x+1)}=e^{-2x+1+x-1}=e^{-x}$

و منه $\frac{e^{-2x+1}}{e^{-x+1}}>\frac{1}{2}$ تعني $e^{-x}>\frac{1}{2}$ أي $-x>\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ و هذا يعني $-x>-\ln 2$ أي $x<\ln 2$.

مجموعة حلول المتراجحة (2) هي إذن: $S=]-\infty;\ln 2[$.

تمرين محلول2: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$e^{2x}-e^{x}-6=0 \quad (1) \qquad \text{و} \qquad e^{2x}-e^{x}-6>0 \quad (2)$$

طريقة: لحل معادلة من الشكل $ae^{2x}+be^{x}+c=0$ أو متراجحة من الشكل $ae^{2x}+be^{x}+c>0$:

- نضع $X=e^{x}$ ثم نحل المعادلة $aX^2+bX+c=0$ أو المتراجحة $aX^2+bX+c>0$.
- نعين قيم x انطلاقا من العلاقة $X=e^{x}$.

الحل:

1. بوضع $X=e^{x}$ نحصل على المعادلة ذات المجهول X التالية: $X^2-X-6=0$.

لدينا $\Delta=25$ و منه حلول المعادلة $X^2-X-6=0$ هما: $X'=-2$ و $X''=3$.

- $e^{x}=-2$ لا تقبل حلولا لأن $e^{x}>0$.
- $e^{x}=3$ تعني $x=\ln 3$.

مجموعة حلول المعادلة (1) هي إذن: $S=\{\ln 3\}$.

2. بوضع $X=e^{x}$ نحصل على المتراجحة ذات المجهول X التالية: $X^2-X-6>0$.

للمعادلة $X^2-X-6=0$ جذران هما -2 و 3. و بالتالي فإشارة X^2-X-6 هي كالآتي:

X	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
X^2-X-6		$+$	0	$-$	0	$+$	

حلول المتراجحة $X^2-X-6>0$ هي إذن الأعداد الحقيقية X بحيث: $X<-2$ أو $X>3$.

- $e^{x}<-2$ لا تقبل حلولا لأن $e^{x}>0$.
- $e^{x}>3$ تعني $x>\ln 3$.

مجموعة حلول المتراجحة (2) هي إذن: $S=]\ln 3;+\infty[$.

elbassair.net

دراسة الدالة الأسية

1. النهايات

خواص: نهاية الدالة " exp " عند $+\infty$ هي $+\infty$ و نهايتها عند $-\infty$ هي 0.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ و (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

البرهان:

- نقبل دون برهان الخاصية (1).
- من أجل x من $\mathbb{R}$، نضع $X = -x$ و منه $e^x = e^{-X} = \frac{1}{e^X}$. لدينا: $\lim\limits_{x\to-\infty} X = +\infty$

و من الخاصية (1) لدينا: $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(e^X\right) = +\infty$ و هكذا فإن $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{e^X} = 0$.

و بالتالي فإن، حسب المبرهنة المتعلقة بنهاية دالة مركبة، $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

2. مشتقة الدالة الأسية

خاصية: الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\exp'(x) = e^x$

البرهان: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = \ln\left[\exp(x)\right]$.

نلاحظ أن $f = \ln\circ u$ حيث $u : x \mapsto \exp(x)$.

الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\exp'(x)}{\exp(x)}$.

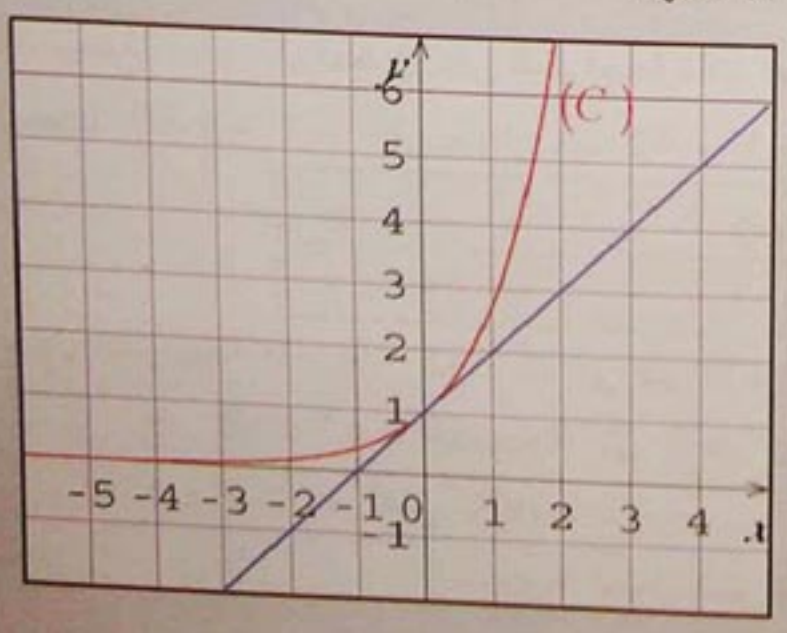
نعلم من جهة ثانية أن $f(x) = \ln\left(e^x\right) = x$ و منه $f'(x) = 1$ و هكذا فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $\frac{\exp'(x)}{\exp(x)} = 1$.

و هذا يعني أن $\exp'(x) = \exp(x) = e^x$.

نتائج:

- الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ لأن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $e^x > 0$.
- دالة أصلية للدالة $x \mapsto e^x$ على $\mathbb{R}$ هي الدالة $x \mapsto e^x$ نفسها.

3. التمثيل البياني



x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$		+		+		+	
$\ln x$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$

معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها 0 هي: $y = x + 1$.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2+e^{-2x+3}$

1. عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f.

الحل:

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x+3)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x+3}=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x+3)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-2x+3}=0$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$.

2. الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=-2e^{-2x+3}$.

بما أن $e^{-2x+3}>0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)<0$.

إذن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ و ليكن (C) منحنيها البياني.

1. عين نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. استنتج المستقيمات المقاربة للمنحنى (C).
2. أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها. أرسم المنحنى (C) في معلم متعامد و متجانس.

الحل: 1)

- لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x+1}{e^x-1}=-1$ إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1$.
- نعلم أن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ و منه لدينا حالة عدم التعيين.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{e^x}}{1-\frac{1}{e^x}}$$

و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to0}(e^x+1)=2$ و $\lim\limits_{x\to0}(e^x-1)=0$.

نعلم أن $e^x<1$ يعني $x<0$ و $e^x>1$ يعني $x>0$

و بالتالي $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}f(x)=+\infty$.

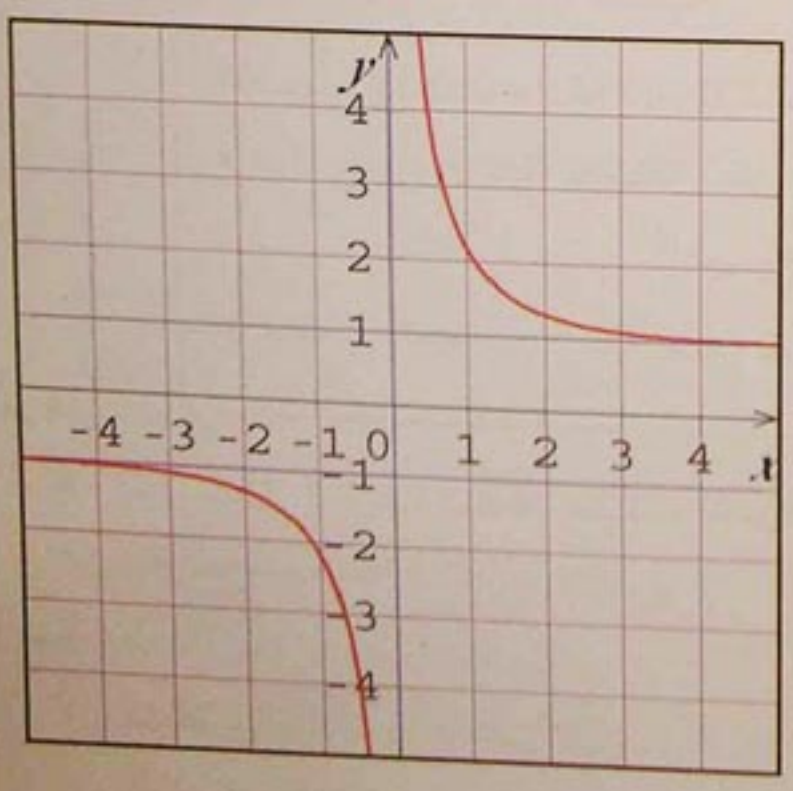
يقبل المنحنى (C) ثلاث مستقيمات مقاربة معادلاتها:

$x=0$، $y=-1$ و $y=1$.

2) f قابلة للاشتقاق على المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$

و لدينا $f'(x)=\dfrac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$ و بالتالي فالدالة f

متناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$.



ملاحظة: يمكنك إثبات أن الدالة f فردية.

elbassair.net

ـ دراسة دالة $\exp\circ u$

1. النهايات

لدراسة نهاية دالة $\exp\circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{-x+2}$.

- لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+2)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+2}=+\infty$ أي $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$.
- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(-x+2)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^{X}=0$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x+2}=0$ أي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

2. اتجاه التغيرات

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

البرهان:

نعلم أن الدالة " exp " متزايدة تماما على المجال $\mathbb{R}$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $\exp\circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{x^2-1}$.

نلاحظ أن $f=\exp\circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $u(x)=x^2-1$.

بما ان الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;0]$.

بما ان الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$ فإن الدالة f متزليدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

3. المشتقة و دوال أصلية

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن:

- الدالة $\exp\circ u$ قابلة للاشتقاق على I و لدينا من أجل كل x من I،
$$(\exp\circ u)'(x)=u'(x)e^{u(x)}.$$
- الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto u'(x)e^{u(x)}$ على I.

البرهان:

- يكفي تطبيق المبرهنة المتعلقة بمشتقة دالة مركبة.
- يكفي حساب مشتقة الدالة $x\mapsto e^{u(x)}$.

مثال:

- مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{x^2+x+1}$ هي $f'(x)=(2x+1)e^{x^2+x+1}$.
- الدالة F حيث $F(x)=e^{-x^2}$ هي دالة أصلية للدالة f حيث $f(x)=-2xe^{-x^2}$ على $\mathbb{R}$.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

elbassair.net

تمرين محلول1: نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $f(x)=e^{2+\ln x}$
أدرس نهايتي الدالة f عند 0 و عند $+\infty$.

الحل:

- لدينا: $\lim\limits_{x\to 0}(2+\ln x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty}e^X=0$ فإن $\lim\limits_{x\to 0}e^{2+\ln x}=0$
و بالتالي $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$
- لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}(2+\ln x)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty}e^X=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2+\ln x}=+\infty$
و بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ملاحظة: يمكن ملاحظة أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f(x)=e^{2+\ln x}=e^2e^{\ln x}=e^2x$

تمرين محلول2: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\ln\left(e^{2x}+1\right)$ و ليكن (C) منحنيها البياني.

1. أحسب $f'(x)$ ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f.
2. عين نقط المنحنى (C) التي يكون عندها المماس موازيا للمستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\frac{x}{3}$

الحل:

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)=\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$.
بما أن $e^{2x}>0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f'(x)>0$ و منه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2. يكون المماس عند نقطة من (C) فاصلتها x موازيا للمستقيم (Δ) يعني $f'(x)=\frac{1}{3}$

يكون لدينا إذن $\frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}=\frac{1}{3}$ أي $6e^{2x}=e^{2x}+1$ و هذا يعني $e^{2x}=\frac{1}{5}$ أي $2x=-\ln 5$ و منه $x=-\frac{\ln 5}{2}$
و بالتالي توجد نقطة وحيدة من (C) فاصلتها $x=-\frac{\ln 5}{2}$ يكون المماس عندها موازيا للمستقيم (Δ).

تمرين محلول3: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{2x+3}$
عين الدالة الأصلية g للدالة f على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم عند -1.

الحل:

- بوضع $u(x)=2x+3$ يكون لدينا $u'(x)=2$
و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=\frac{1}{2}\times u'(x)e^{u(x)}$

و بالتالي تقبل الدالة f على $\mathbb{R}$ دوالا أصلية F معرفة كما يلي: $F(x)=\frac{1}{2}e^{2x+3}+c$ حيث c عدد حقيقي ثابت.

- لدينا $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x+3}+c$ و $g(-1)=0$ و منه $\frac{1}{2}e^{2(-1)+3}+c=0$ أي $\frac{1}{2}e+c=0$ و بالتالي $c=-\frac{1}{2}e$. نجد هكذا: $g(x)=\frac{1}{2}e^{2x+3}-\frac{e}{2}$.

دوال الكلفة و الدالة الأسية

الجزء الأول:

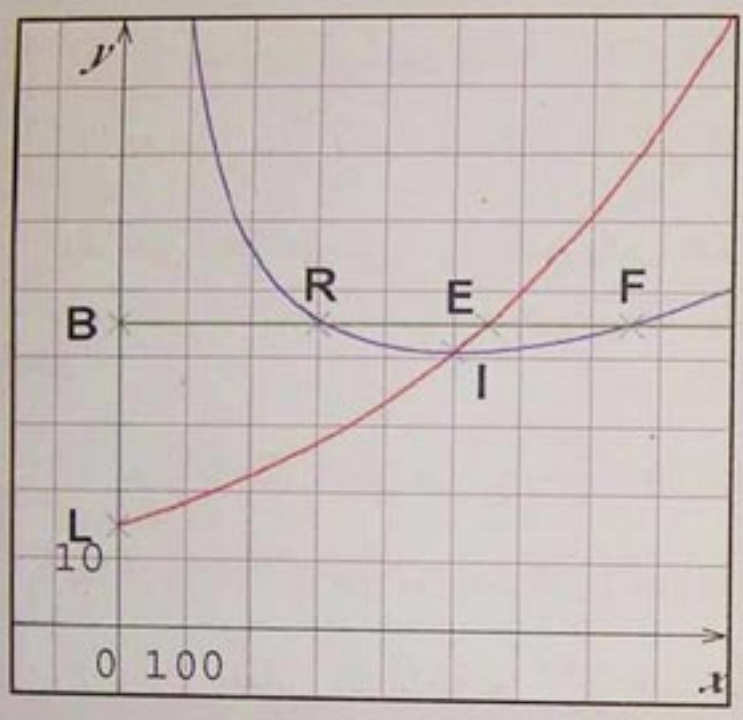
نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $[0;900]$ كما يلي:

$$f(x)=7500e^{0,002x} \quad \text{و} \quad g(x)=15e^{0,002x}$$

1. بين أن الدالة f دالة أصلية للدالة g.

2. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0;900]$ بـ $h(x)=\dfrac{f(x)}{x}$

- أدرس نهاية الدالة h عند 0.
- أدرس اتجاه تغير الدالة h ثم بين أنها تقبل قيمة حدية صغرى b من أجل قيمة a للمتغير.



في المعلم المتعامد المقابل رسمنا المنحنيين (C_g) و (C_h) الممثلين للدالتين g و h كما رسمنا (D) المستقيم ذو المعادلة $y=45$.

3. بين أن المنحنيين (C_g) و (C_h) يتقاطعان في النقطة $I(a;b)$.

4. حل في $[0;900]$ المعادلة $g(x)=45$ و ليكن x_0 حلها.

5. بين أن المعادلة $h(x)=45$ تقبل بالضبط حلين x_1 و x_2 في $]0;900]$ $(x_1<x_2)$. عين المدور إلى الوحدة لكل من x_1 و x_2.

6. بين أن $\int_0^{x_1}(45-g(x))dx=f(0)$.

7. عين على محور الفواصل الأعداد a، x_0 ، x_1 و x_2.

الجزء الثاني:

يمكن أن يبلغ إنتاج إحدى الورشات 900 وحدة يوميا.

كما أن مصاريفها الثابتة اليومية تقدر بـ $7500DA$.

كل المنتوج اليومي يباع بحيث أن ثمن الوحدة هو $45DA$.

من أجل كل x من $]0;900]$، تمت نمذجة الكلفة الهامشية لـ x وحدة بـ $C_m(x)=g(x)$.

1. بين أن الكلفة الإجمالية للإنتاج اليومي $C(x)$ معرفة بـ $C(x)=f(x)$.

2. باستعمال نتائج الجزء الأول، استنتج الحيز المستوي الذي تمثل مساحته المصاريف اليومية الثابتة.
(يتم تظليل هذا الحيز في الشكل السابق).

3. ماذا تمثل القيمة $h(x)$ ؟

4. برر، باستعمال التمثيلات السابقة ، أن ربح الورشة يكون موجبا عندما يكون الإنتاج محصورا بين x_1 و x_2.

5. أحسب الربح المحقق على إنتاج الوحدة 401 (التي رتبتها 401). تعطى قيمة مقربة إلى 0,1 لهذا الربح .

6. ماذا تمثل مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_g)، المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=x_0$ و $x=x_1$ ؟

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

دراسة دالة تتضمن الدالة الأسية

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ حيث وحدة الطول هي $1cm$.

1. بين أن الدالة f فردية. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C) ؟
2. * بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=x+1-\dfrac{2}{e^{-x}+1}$
   * استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.
3. * بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$
   * بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.
   * حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ).
4. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-\infty;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
5. عين معادلة لـ (d) مماس المنحنى (C) عند النقطة التي فاصلتها 0.
6. أرسم (d)، (Δ)، (Δ') و (C) حيث (Δ') هو المستقيم المقارب للمنحنى (C) عند $-\infty$.
7. عين دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ثم أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C)، المستقيم (Δ) و المستقيمين اللذين معدلتاهما $x=0$ و $x=1$.

دراسة متتالية تتضمن الدالة الأسية

الجزء الأول: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها العام كما يلي: $u_n=e^{-\frac{1}{3}+2n}$

1. أدرس اتجاه تغير الدالة f المعرفة على المجال $]-\infty;+\infty[$ بـ $f(x)=e^{-\frac{1}{3}+2x}$
2. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).
3. بين أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تحديد حدها الأول و أساسها.
4. نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $S_n=u_0+u_1+\ldots+u_n$.
   - أحسب S_n بدلالة n.
   - عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n=\dfrac{e^{-\frac{1}{3}}}{1-e^2}\times\left(1-e^{10}\right)$

الجزء الثاني: نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$، $v_n=\ln(u_n)$

1. ما هي طبيعة المتتالية (v_n) ؟ حدد حدها الأول و أساسها.
2. عبر بدلالة n عن المجموع S'_n علما أن $S'_n=v_0+v_1+\ldots+v_n$.
3. عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S'_n=\dfrac{160}{3}$.

elbassair.net

موضوع محلول

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $f(x)=x+\dfrac{4}{1+e^x}$

1. احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2. أ- احسب $f'(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f.

ب- ادرس إشارة $f'(x)$ و شكل جدول تغيرات الدالة f.

3. نرمز بـــ $(\mathcal{C})$ إلى التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

أ- بين أن المنحنى $(\mathcal{C})$ يقبل المستقيم D الذي معادلته $y=x$ كمقارب مائل عند $+\infty$ ، و يقبل المستقيم D' الذي معادلته $y=x+4$ كمقارب مائل عند $-\infty$.

ب- ادرس وضعية المنحنى $(\mathcal{C})$ بالنسبة إلى كل من D و D'

4. بين أن المنحنى $(\mathcal{C})$ يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α حيث $\alpha\in\,]-4;-3[$.

5. ارسم $(\mathcal{C})$.

6. أ -عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{4}{1+e^x}=a+\dfrac{be^x}{1+e^x}$

ب- استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

جـــ- احسب المساحة A للحيز المحدد بالمنحنى $(\mathcal{C})$ و المستقيم D و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$.

حل مختصر

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

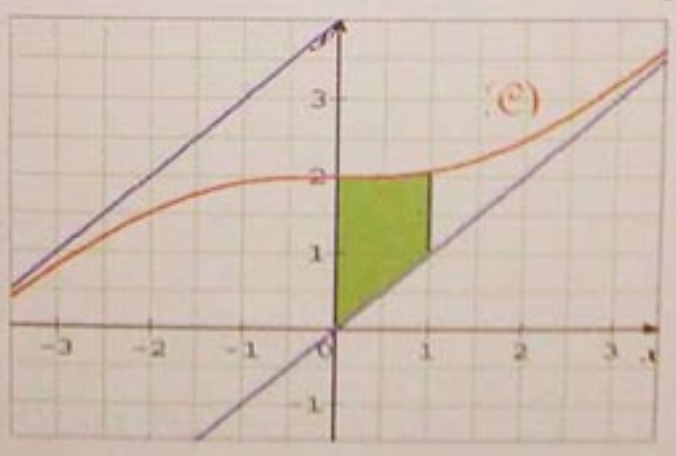
2. أ- $f'(x)=\dfrac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2}$ ، الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

3. أ- يكفي أن تبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$

و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+4)]=0$

ب- المنحنى $(\mathcal{C})$ فوق D و تحت D'.

5. انظر الشكل



6. أ- $(a=4)$ و $(b=-4)$

ب- دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي الدالة F المعرفة بـــ:

$$F(x)=\frac{x^2}{2}+4x-4\ln(1+e^x)$$

تعاليق

- لاحظ أن $f'(x)\geq 0$
- لدراسة الوضعية ادرس إشارة الفرق $[f(x)-x]$ و إشارة الفرق $[f(x)-(x+4)]$
- الدالة f مستمرة متزايدة تماما على $[-4;-3]$ ، و $f(-4).f(-3)<0$
- لا تنسى أن تحسب $f(-4)$ و $f(-3)$
- $A=\int_0^1[f(x)-x]\,dx$
- $A=F(1)-F(0)$

موقع عيون البصائر التعليمي

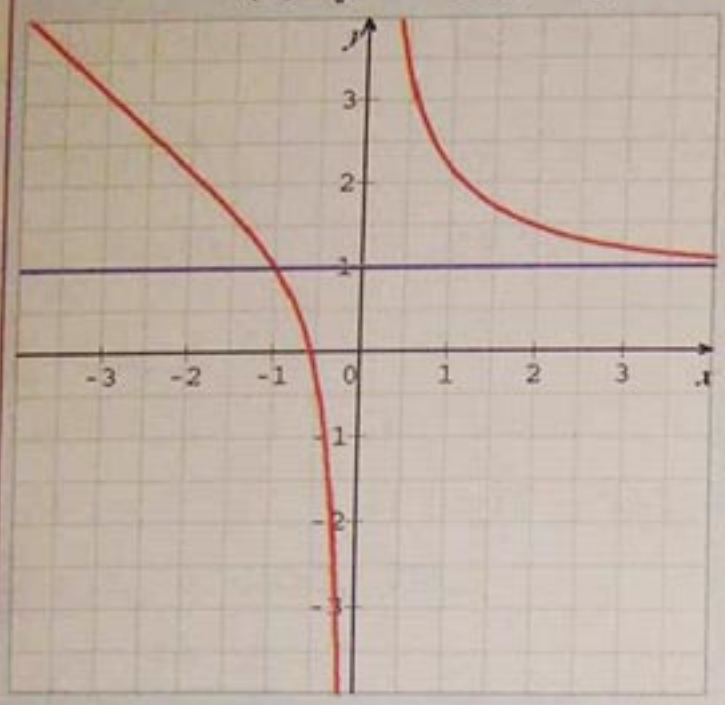
elbassair.net

استعد للباكالوريا

موضوع مع إرشادات

الجزء A :

المنحنى $(\mathscr{C})$ في الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$، محور التراتيب و المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقاربان للمنحني $(\mathscr{C})$.



1. اقرأ بيانيا نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف.

2. حل بيانيا كل من :

أ) $f(x)=1$ ؛ ب) $f(x)>1$

الجزء B : نقبل أن الدالة f معرفة على بـ : $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x-1}$

1. أ- تحقق أن : $f(x)=\dfrac{1+\dfrac{e^x}{x}}{1-\dfrac{1}{e^x}}$

ب- نقبل أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ ، جد من جديد إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2. أ- ادرس ، حسب قيم x إشارة (e^x-1)

ب- حل المترجحة $\dfrac{e^x+x}{e^x-1}>1$

3.أ- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]=0$

ب- ماذا تستنتج ؟

4. ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y=-x$

إرشادات

A 1. المطلوب حساب أربع نهايات.

2. أ- لتحظ فواصل نقط تقاطع المنحني $(\mathscr{C})$ مع المستقيم الذي معادلته $y=1$.

ب- عين فواصل نقط المنحني التي ترتيبها أكبر تمام من 1

B 1. أ- ضع e^x كعامل مشترك في البسط و في المقام أو استعمل العبارة المقترحة لتصل إلى العبارة المعطاة .

ب- استعمل العبارة السابقة

2. ب- حل هذه المتراجحة يؤول إلى حل $\dfrac{e^x+x}{e^x-1}-1>0$.استعمل جدولا للإشارة و نتيجة السؤال2.أ-

3. ب- فكر بالمستقيم المقارب المائل .(لاحظ أن معادلته معطاة في السؤال4).

elbassair.net

تمارين

تمارين تطبيقية

1 - الدالة الأسية

1 في كل حالة من الحالات التالية عين مجموعة تعريف الدالة f للمتغير الحقيقي x :

1) $f(x)=e^{-x}$ ؛ 2) $f(x)=e^{x^2+x}$ ؛

3) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ ؛ 4) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ ؛

5) $f(x)=\dfrac{1}{xe^x}$ ؛ 6) $f(x)=e^x-e^{-x}$.

2 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $e^x=2$ 2) $e^x=e^{2x}$

3) $e^{-2x+3}=1$ 4) $(e^x-2)(e^x+2)=0$

3 حل في $\mathbb{R}$ المعادلتين التاليتين:

1) $\dfrac{2e^x+1}{e^x-1}=3$ 2) $\dfrac{e^x+1}{2e^x-1}=2$

4 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $e^{-x}=e^{\frac{x}{2}}$ 2) $2e^{-0,5x+6}=1$

3) $e^{0,01x+4}=e^2$ 4) $e^{-0,4x+10}=0$

5 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $2\ln x=9$ 2) $\ln(2x^2)=0$

3) $\ln(2x^2+x)=0$ 4) $\ln(x+1)=4$

6 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $e^x\geq 3$ 2) $e^x\geq -1$ 3) $e^{2x}\geq 5$

7 حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة التالية:

$$\begin{cases}2e^x-e^y=e\\ e^x+2e^y=1\end{cases}$$

8 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $e^x\geq 3$ 2) $e^x\geq -1$ 3) $e^{2x}\geq 5$

9 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين التاليتين:

1) $e^{x+3}\geq -2$ 2) $e^{-0,1x+2}\geq 2$

3) $e^{-x+4}\leq 10^{-2}$ 4) $e^{-0,01x}<0,05$

10 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحتين التاليتين:

1) $\ln(x+1)<2$ 2) $\ln(4-2x)\geq 3$

3) $\ln(3x+2)\leq 1$ 4) $\ln\left(\dfrac{1}{x-1}\right)>1$

2 - الخواص الجبرية

11 أكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية:

$e^{2\ln 3}$ ، $\ln(e^{-4})$ ، $\ln\sqrt{e^3}$ ، $\exp\left(\ln\sqrt{2}\right)$

12 بسط العبارات التالية:

$$A=e^5+7e^{-5}-3e^5-9e^{-5}$$

$$B=\frac{7e^5\times\left(3e^3\right)^2}{21e^{-5}}$$

$$C=\left(2e^3+e^3\right)^2$$

$$D=\left(e^3-2\right)^2-\left(e^3+2\right)^2$$

13 من أجل كل عدد حقيقي x بين ما يلي:

1) $\dfrac{e^x-1}{e^x+1}=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

2) $\dfrac{3e^x+1}{e^x+1}=3-\dfrac{2}{e^x+1}$

14 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $e^{2x}-4e^x=0$ 2) $e^{2x}-2e^x=-1$

3) $2e^{2x}+3e^x=0$ 4) $e^{2x}+3e^x=-\ln 2$

15 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $1-e^x>0$ 2) $-e^{-2x+1}+2\leq 0$

3) $e^{-x}-2\geq$ 4) $e^{\frac{1}{2}x+1}\geq 1$

16 1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $t^2-2t-3=0$

2. استنتج حل المعادلتين التاليتين:

أ) $e^{2x}-2e^x-3=0$ ب) $e^x-2-3e^{-x}=0$

17 حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

1) $e^{2x}-4e^x+4=0$ 2) $e^x+e^{-x}=2$

3) $e^{4x}-4e^{2x}+3=0$ 4) $e^x+1e^{2x}=6e^{-x}$

18 1.حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^2-4x-5=0$

2.استنتج الحلول في $\mathbb{R}$ لمعادلات التالية:

أ) $\ln(x-3)+\ln(x-1)=3\ln 2$

ب) $(\ln x)^2-4\ln x-5=0$

جـ) $e^x-4=5e^{-x}$

19 حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية:

1) $e^{2x}-2e^x-8>0$ 2) $e^x-e^{-x}>0$

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

3) $(e^x-1)(e^x-3)\geq 0$

20 1. حلل كثير الحدود X^2-6X+8

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $e^{2x}-3e^x>3e^x-8$

21 1. تحقق من أن

$$2X^3-X^2-2X+1=(X+1)(X-1)(2X-1)$$

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $2e^{3x}-e^{2x}-2e^x+1>0$

22 بكالوريا

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $2t^2-5t+2=0$

2) حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة : $\begin{cases}2e^{2x}-5e^x+2=0\\ e^x\times e^y=2\end{cases}$

23 بكالوريا

1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $2t^3-7t^2+3t=0$

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $2e^{3x}-7e^{2x}+3e^x=0$

24 بكالوريا

1) حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة : $\begin{cases}e^x-e^{y+1}=0\\ \ln x-2\ln y=1\end{cases}$

25 حل في $\mathbb{R}^2$ الجملتين التاليتين:

1) $\begin{cases}5e^{-x}+3e^{-y}=3\\ 7e^{-x}-4e^{-y}=2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}e^xe^{y-1}=e^2\\ e^{x-2}e^y=1\end{cases}$

3 ـ دراسة الدالة الأسية

26 ادرس في كل حالة من الحالات التالية نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

1) $f(x)=e^{-x}$ 2) $f(x)=2e^{2x}$

3) $f(x)=e^x+e^{-x}$ 4) $f(x)=x+e^{2x}$

27 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=1+e^x+e^{2x}$

ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

28 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^{2x}-e^x$

1.ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$.

2. أ- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f(x)=e^{2x}\left(1-e^{-x}\right)$$

ب-استنتج نهاية f عند $+\infty$.

• في التمرينين من **29** و **30** ،ادرس نهاية الدالة f

29 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{2e^x+1}$ ، عند $-\infty$ و عند $+\infty$

30 $f(x)=\left(-x-e^{3x}\right)$ ، عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

31 باستعمال المبرهنات حول النهايات ن عين النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+e^x)$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+4e^x)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}-2e^x)$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+e^x}\right)$

32 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

1.تدرس نهاية f عند $-\infty$.فسر النتيجة بيانيا.

2.بين انه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=\dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

استنتج نهاية f عند $+\infty$. فسر النتيجة بيانيا.

33 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=x-\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$

1. احسب $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

2. بين أن المستقيم الذي معادلته $y=x-1$ مقارب لمنحنى الدالة f عند $+\infty$.

3.بين أن الدالة f فردية.

4.أ- استنتج $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

ب- استنتج أن منحنى الدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

34 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x+1-e^{-x}$

1. بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=2x+1$ مقارب للمنحنى (C) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

2. ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى D .

35 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=-x+2+3e^{-2x}$

بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=2-x$ مقارب للمنحنى (C) الممثل للدالة f عند $+\infty$.

• في التمارين من **36** إلى **42** ، احسب الدالة المشتقة f' للدالة f على المجال I .

36 $f(x)=xe^x$ ، $I=\mathbb{R}$

37 $f(x)=(2x-3)e^x$ ، $I=\mathbb{R}$

38 $f(x)=(x^2+x+1)e^x$ ، $I=\mathbb{R}$

elbassair.net

تمارين

39 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$ ، $I=\mathbb{R}^*$

40 $f(x)=\dfrac{3e^x-2}{e^x+1}$ ، $I=\mathbb{R}$

41 $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x-x}$ ، $I=\mathbb{R}$

42 $f(x)=(e^x-1)(e^x+2)$ ، $I=\mathbb{R}$

43 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x+1+e^x$

1.ادرس تغيرات الدالة f .

2.ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

3.شكل جدول تغيرات الدالة f .

4.أنشئ في معلم متعامد التمثيل البياني للدالة f .

44 f دالة معرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{1}{2}x+1-e^{-x}$$

1.أ- ادرس تغيرات الدالة f .

ب- ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$.

2. أ- بين أن المنحنى (C) الممثل للدالة f في معلم يقبل مستقيما مقاربا D عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

ب- ادرس وضعية المحنى (C) بالنسبة للمستقيم D .

3.أرسم المستقيم D و المحنى (C) .

45 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{e^{4x}-3}{e^{4x}+1}$

1.بين أنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $f(x)=\dfrac{1-3e^{-4x}}{1+e^{-4x}}$.

2.عين نهاية الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

3. احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها.

4. شكل جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$

46 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=\dfrac{4e^x+3}{2(e^x+1)}$

و (C) المنحنى الممثل لها في معلم

1.لماذا المستقيمين Δ و D اللذين معادلتاهما على الترتيب $y=\dfrac{3}{2}$ و $y=2$ مقاربان للمنحنى (C) ؟

2.أ- احسب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x .

ب-ادرس تغيرات f .

ج- ارسم Δ ، D و (C) .

47 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=\frac{5}{e^x+1}-\frac{x}{2}-1$$

1.أ- عيين نهايتي f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

ب- بين أن المستقيم $\mathcal{D}$ الذي معادلته $y=-\dfrac{x}{2}+4$ مقارب للمنحني $\mathcal{C}_f$ الممثل للدالة f عند $-\infty$.

ادرس الوضعية النسبية لـ $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{D}$.

جـ- بين أن $\mathcal{C}_f$ يقبل كذلك مستقيما مقاربا Δ عند $+\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

2. بدون حساب المشتقة ، ادرس اتجاه تغير الدالة f .

3.بين أن $\mathcal{C}_f$ يقطع محور الفواصل في نقطة واحدة.أعط مدورا إلى 0,1 لفاصلة هذه النقطة.

4.ارسم $\mathcal{D}$ ، Δ و $\mathcal{C}_f$ في معلم متعامد و متجانس.

4 - دراسة الدالة $\exp\circ u$

48 • في التمارين من **48** إلى **51** ، احسب الدالة المشتقة f' للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$.

49 1) $f(x)=e^{2x+3}$ 2) $f(x)=(-x-1)e^{-x}$

50 1) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-\frac{x}{2}}}$ 2) $f(x)=(x^2-1)e^{2x}$

51 1) $f(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$ 2) $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)e^{-\frac{1}{x}}$

52 بدون حساب المشتقة ، ادرس اتجاه تغير الدالة f على المجموعة المعطاة

1) $f(x)=x+2+e^{x-1}$ على $\mathbb{R}$

2) $f(x)=-x+e^{1-x}$ على $\mathbb{R}$

3) $f(x)=-e^{x+2}+3-2x$ على $\mathbb{R}$

4) $f(x)=\dfrac{1}{x}+e^{-x}$ على $]0;+\infty[$

5) $f(x)=-2e^x+e^{-x+3}$ على $\mathbb{R}$

53 f دالة معطاة بجدول تغيراتها التالي و علما أن $f(-1)=0$

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\ln 4$	↘	0

1. استنتج تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

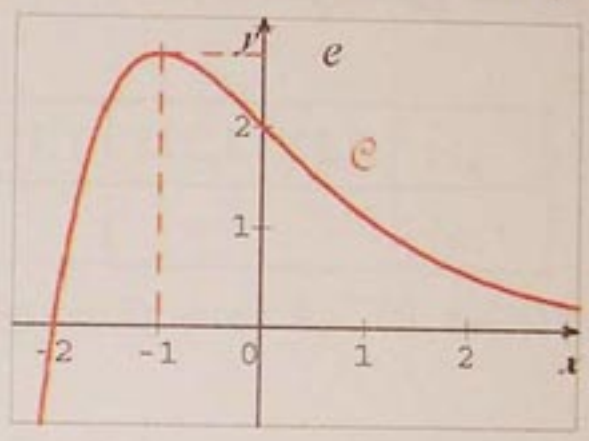
$$g(x)=e^{f(x)}$$

2. حدّد القيمة الحدية للدالة g .

3. عين نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$

4. شكل جدول تغيرات الدالة g .

54 لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ ، تمثيلها البياني معطى في الشكل التالي ،و محور الفواصل مقارب للمنحنى $\mathscr{C}$ عند $+\infty$.



1. أ- بقراءة بيانية ، عين نهايتي f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

ب- استنتج نهايتي الدالة g عند $-\infty$ و عند $+\infty$

حيث $g: x \mapsto \exp[f(x)]$

2. حل بيانيا : $f(x)=0$ ثم $f(x)\geq 0$.

ب- استنتج حلول $g(x)=1$ ثم $g(x)\geq 1$.

3. شكل جدول تغيرات f ثم جدول تغيرات g .

55 نريد دراسة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=e^{x^2+2x}$$

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x)=x^2+2x$

ارسم القطع المكافئ الممثل للدالة g في معلم متعامد و متجانس وأعط تغيرات g .

2. مستعملا الدالة g :

أ- ادرس تغيرات f .

ب- عين نهايتي f عند $-\infty$ و عند $+\infty$

جـ- ارسم المنحنى الممثل للدالة f في نفس المعلم.

56 ادرس تغيرات الدالة المعرفة على باستعمال المشتقة

1) $f(x)=e^{2x}-e^{x}$ 2) $f(x)=3x-1-e^{-x+2}$

3) $f(x)=\dfrac{e^{x}}{2+e^{-x}}$ 4) $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^{x}+1}$

57 جد دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ في كل حالة من الحالات التالية:

1) $f(x)=e^{x}-2x+1$

2) $f(x)=x^{2}+e^{-2x+3}$

3) $f(x)=e^{2x}-2e^{x}+1$

4) $f(x)=3(e^{0,01x}+1)$

58 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=\ln(1+e^{x})-x$$

1. احسب مشتقة الدالة f

2. استنتج دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة g المعرفة بـ :

$$g(x)=\frac{2}{e^{x}+1}$$

59 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=(x-2)e^{\frac{1}{2}x}$$

1. احسب مشتقة الدالة f

2. استنتج دالة أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة g المعرفة بـ :

$$g(x)=0,03\,.e^{\frac{1}{2}x}$$

60 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=(2x+3)e^{2x}$$

لتكن g الدالة المعرفة $\mathbb{R}$ على بـ :

$$g(x)=(ax+b)e^{2x}$$

حيث a و b عددان حقيقيان

عين a و b حتى تكون الدالة g أصلية على $\mathbb{R}$ للدالة f .

61 1. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$\frac{1}{1+e^{x}}=1-\frac{e^{x}}{1+e^{x}}$$

2. استنتج $I=\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{1+e^{x}}dx$

62 احسب التكاملات

1) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^{x}dx$ 2) $\displaystyle\int_{1}^{2}e^{2x+3}dx$

3) $\displaystyle\int_{0}^{1}(x+1)e^{x^{2}+2x}dx$ 4) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{e^{x}}{e^{2x}+1}dx$

elbassair.net

تمارين

تمارين للتعمق

63 في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ ، المنحنى $\mathscr{C}$ ممثل لدالة f معرفة و قابلة للاشتقاق على $[0;4]$ يشمل النقطة $A(0;2)$ و يقبل مماسا أفقيا عند النقطة التي فاصلتها 3.

عين العددين a و b ، الصور $f(3)$ و $f(4)$ في كل حالة من الحالتين التاليتين:

1) $f(x)=(ax+b)e^x$ 2) $f(x)=ax+be^x$

64 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$f(x)=ax+b-\frac{4e^x}{e^x+2}$$

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

E هي النقطة التي إحداثياتها $(\ln 2;\ln 2)$

1.عين العددين a و b حتى يشمل المنحني الممثل للدالة f النقطة E و يقبل في هذه النقطة مماسا موازيا لحامل محور الفواصل .

2.ادرس تغيرات الدالة f المحصل عليها.

65 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$f(x)=e^x(e^x+a)+b$$

حيث a و b عددان حقيقيان ثابتان

جدول تغيرات f معطى كما يلي:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	
$f(x)$		-3 ↘	↗

1.احسب $f'(x)$ بدلالة a.

2.1- عين a و b مستعينا بالمعلومات المتوفرة في جدول التغيرات.

ب- احسب $f(0)$ و عين نهاية f عند $+\infty$

جـــ- أنقل ثم أكمل جدول التغيرات.

3.حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x)=0$.فسر بيانيا النتيجة.

4.استعن بجدول التغيرات لحل:

أ) $f(x)\geq -4$ ب) $f(x)\leq 0$

66 بكالوريا

الجزء1:

1.الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ، نرمز بـــ f' إلى دالتها المشتقة

احسب $f'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$.

2.استنتج أن الدالة f متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

3.عين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

4.أ- شكل جدول تغيرات الدالة f على $]0;+\infty[$.

ب- نقبل أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α حيث $f(\alpha)=0$

أعط إشارة الدالة f على $]0;+\infty[$.

5.أ-انقل ثم أتمم الجدول التالي(تعطى القيم مدورة إلى 10^{-4}).

x	1,32	1,325	1,33
$f(x)$			

ب- استنتج قيمة α مدورة إلى 10^{-2} حيث $f(\alpha)=0$

الجزء2:

1. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ :

$$g(x)=e^{x-3}-\ln(x+4)$$

أ- الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0;+\infty[$ ، نرمز بـــ g' إلى دالتها المشتقة

احسب $g'(x)$ من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$.

ب- ادرس اتجاه تغير g الدالة على $]0;+\infty[$(استعمل نتائج الجزء1)

2.احسب التكامل $\int_0^3 f(x)\,dx$ أعط قيمته المضبوطة ثم قيمته المقربة مدورة إلى 10^{-2}.

67 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$f(x)=e^x(e^x-2)$$

1. احسب نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2.ادرس اتجاه تغير الدالة f .

3.اكتب معادلة المماس (T) للمنحني $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها $\ln 2$.

4.ارسم (T) و $(\mathscr{C})$ في معلم متعامد و متجانس

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

$(O;\vec{i},\vec{j})$.

5. أ- جد دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

ب- احسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$ و محور الفواصل ومحور التراتيب.

68 نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $[-2;6]$ بـــ :

$f(x)=e^x-x-1$ و $g(x)=(x+2)(1+e^{-x})$

1. ادرس اتجاه تغير الدالة f ، استنتج إشارة f من كل عدد حقيقي x من $[-2;6]$.

2.بين أنه من كل عدد حقيقي x من $[-2;6]$:

$$g'(x)=\frac{f(x)}{e^x}$$

استنتج اتجاه تغير الدالة g.

3.ليكن $(\mathscr{C})$ المنحني الممثل للدالة g في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1cm$)، و ليكن Δ المستقيم الذي معادلته $y=x+2$.

ادرس وضعية المنحني $(\mathscr{C})$ بالنسبة إلى المستقيم Δ.

4.ارسم $(\mathscr{C})$ و Δ.

69 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$f(x)=\frac{6}{1+5e^{-x}}$$

تحقق أنه يمكن كتابة $f(x)$ على الشكل $f(x)=\frac{6e^x}{e^x+5}$

نسمي $(\mathscr{C})$ المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (الوحدة $1cm$)

1.أ- عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

ب) احسب $f'(x)$ و استنتج اتجاه تغير الدالة f .

جـــ- شكل جدول تغيرات f .

2.عين معادلة المماس (Δ) للمنحني $(\mathscr{C})$ عند النقطة التي فاصلتها 0 .

3. مثل النقط التي فواصلها -2 ، -1 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ثم ارسم (Δ) و $(\mathscr{C})$.

4.نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in N}$ المعرفة بحدها العام كما يلي:

$$u_n=f(n)=\frac{6}{5+e^{-n}}$$

أ- ما هو اتجاه تغير المتتالية (u_n) ؟هل المتتالية (u_n) متقاربة؟

ب- عين أصغر عدد طبيعي n حيث $u_n>5,999$.

5.نعتبر الدالة G المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ: $G(x)=\ln(e^x+5)$

أ- أحسب $G'(x)$

ب- استنتج دالة أصلية F للدالة f و التي تنعدم من أجل $x=0$.

70 بكالوريا

نعتبر الدالة r المعرفة على $[0;12]$ بـــ :

$$r(x)=(900x)e^{-0,1(x-2)}$$

الجزء A :

1. نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;12]$ بـــ :

$$f(x)=\ln[r(x)]$$

بين أن : $f(x)=\ln(900)+\ln x-0,1(x-2)$

2. نرمز بـــ f' إلى مشتقة الدالة f .بين أن :

$$f'(x)=\frac{10-x}{10x}$$

3.ادرس إشارة من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;12]$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f على $[0;12]$.

4. نرمز بـــ r' إلى مشتقة الدالة r. عبر عن f' بدلالة r' ثم بين أن $f'(x)$ و $r'(x)$ لهما نفس الإشارة من اجل كل عدد حقيقي x من $[0;12]$.

5.استنتج تغيرات الدالة r على $[0;12]$.

6.من أجل أية قيمة x_0 الدالة r تقبل قيمة حدية عظمى؟احسب قيمة x_0 مدورة على الوحدة.

الجزء B:

1.بين أن الدالة R المعرفة بـــ:

$$R(x)=-9000(x+10)e^{-0,1(x-2)}$$

دالة أصلية للدالة r على $[0;12]$

2.احسب القيمة المتوسطة r_m للدالة r على $[0;12]$

المعرفة بـــ: $r_m=\frac{1}{12}\int_0^{12} r(x)\,dx$

تعطى أولا القيمة المضبوطة ، ثم القيمة المقربة إلى 10^{-2} بالزيادة.

elbassair.net

تمارين

71 بكالوريا

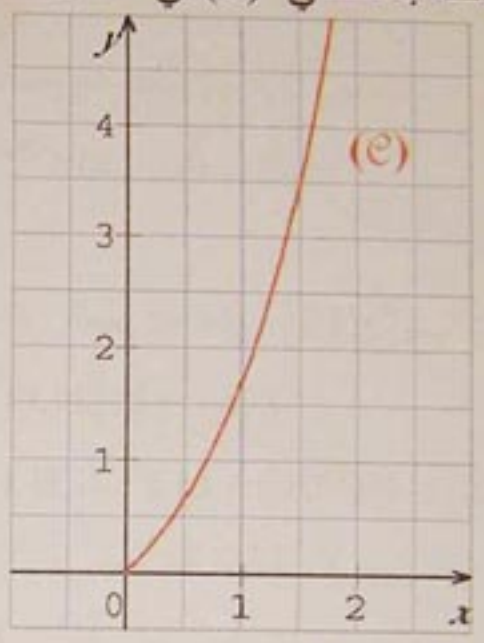
نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=e^x-1 \quad \text{و} \quad g(x)=\frac{3}{e^x+1}$$

الدالتان f و g قابلتان للاشتقاق على $]0;+\infty[$.

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1. الدالة f ممثلة بالمنحني $(\mathcal{C})$ في الشكل التالي:



أ- أعط معادلة للمماس لهذا المنحني عند النقطة O مبدأ المعلم.

ب- ارسم المستقيم T في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

2.أ- احسب $g(0)$

ب- عين نهاية الدالة g عند $+\infty$ ، أعط تفسيرا بيانيا.

جـ- ادرس تغيرات الدالة g على و شكل جدول تغيراتها.

د- ارسم التمثيل البياني Γ للدالة f في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

3.القراءة البيانية تبين أن المعادلة $f(x)=g(x)$ تقبل على المجال حلا واحدا نرمز له بـ m .

أ- مثل في الشكل النقطة التي إحداثياتها $(m;f(m))$.

ب- بين ، بالحساب أن $m=\ln 2$.

4. نعتبر العدد التالي: $A=\int_0^{\ln 2} g(x)dx$

ا- في الشكل السابق ، ضلّل الحيز من المستوي الذي مساحته(بوحدة المساحات) هي A .

ب- لتكن الدالة G القابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ المعرفة بـ : $G(x)=3x-3\ln(e^x+1)$

بين أن الدالة G أصلية للدالة g على $[0;+\infty[$.

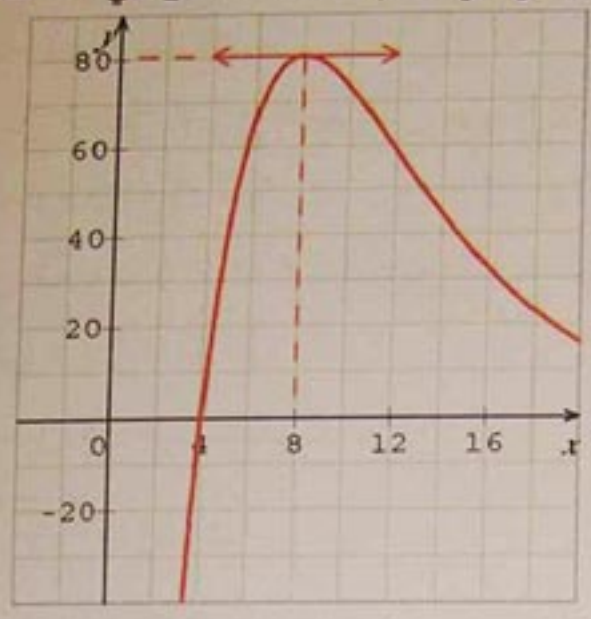
جـ- احسب A.

72

نعتبر الدالة f المعرفة على $[4;20]$ بـ :

$$f(x)=(x-4)e^{-0,25x+5}$$

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في معلم متعامد معطى في الشكل التالي:



الجزء A :

1. بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $[4;20]$:

$$f'(x)=(-0,25x+2)e^{-0,25x+5}$$

2. استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها على $[4;20]$.

3. أ- بين أن الدالة F المعرفة بـ $F(x)=-4xe^{-0,25x+5}$ أصلية للدالة f على $[4;20]$.

ب- احسب $\int_4^{20} f(x)dx$

الجزء B:

مؤسسة تسوق منتوجا حيث سعر التكلفة لوحدة إنتاجية هو $400DA$.نفرض أن عدد المشترين لوحدة إنتاجية معطى بـ : $N=e^{-0,25x+5}$

حيث x هو ثمن البيع لوحدة إنتاجية مقدرا بمئات الدنانير .

1. بين أن الدالة f المعرفة في الجزء A تعطي الفائدة المحققة من طرف المؤسسة ، مقدرة بمئات الدنانير.

2.أي ثمن يجب أن تبيع المؤسسة الوحدة الإنتاجية الواحدة لتحقق فائدة عظمى؟ما هي هذه الفائدة ؟(أعط القيمة مقربة بالزيادة.)

أعط تفسيرا بيانيا لهذه النتيجة.

3.احسب القيمة المتوسطة للفائدة من أجل $x\in[4;20]$.تعطى النتيجة مقربة بالزيادة).

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

مسائل

73 بكالوريا

الجزء A: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ :

$$f(x)=\frac{20}{1+15e^{-0,4x}}$$

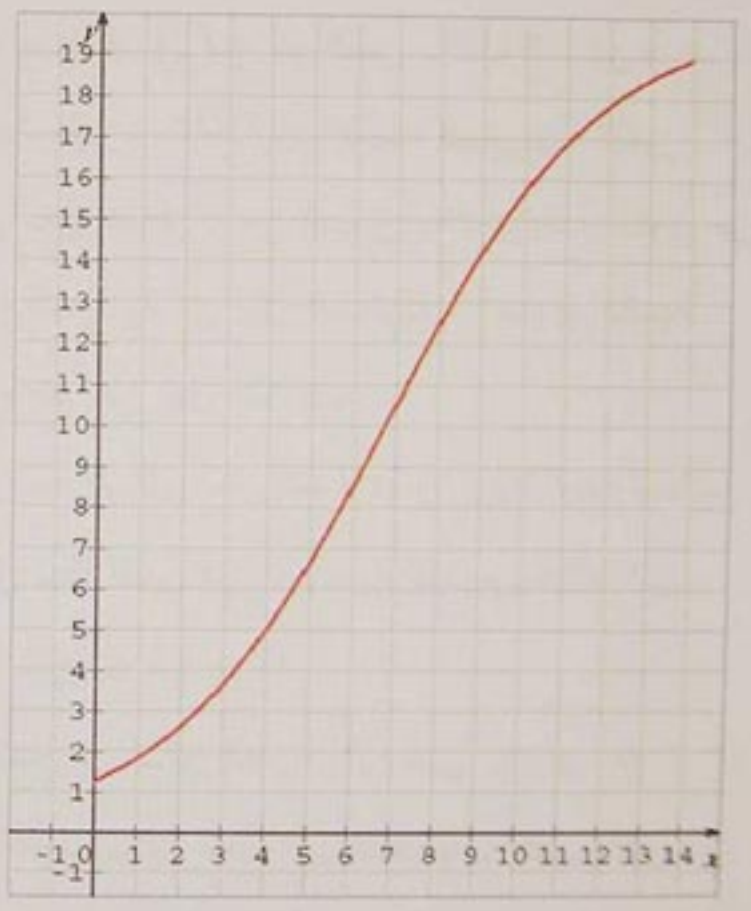
نقبل أن الدالة f تقبل الاشتقاق على هذا المجال.

1. عين نهاية f عند $+\infty$. فسر بيانيا النتيجة.

2. بين أن الدالة f متزايدة على المجال $]0;+\infty[$.

الجزء B:

الدالة f هي الدالة " الكلفة الإجمالية " للإنتاج على المجال $[0;14]$ بالدينار لمنتوج q تمثيلها البياني في معلم متعامد معطى في الشكل التالي:



من أجل كمية q للمنتوج ، مقدرة بالأطنان محصورة بين 0 و 14 ، نضع إذن: $f(q)=\frac{20}{1+15e^{-0,4q}}$

من أجل كل q من $[0;14]$، النسبة $\frac{f(q)}{q}$ تسمى الكلفة المتوسطة لإنتاج q طن من المنتوج.

1. من أجل q من $[0;14]$، لتكن Q النقطة ذات الفاصلة q من التمثيل البياني Γ لدالة f.

بين أن معامل التوجيه المستقيم (OQ) يساوي الكلفة المتوسطة $\frac{f(q)}{q}$.

2. المؤسسة تبحث لتجعل الكلفة المتوسطة للإنتاج صغرى. بقراءة بيانية عين قيمة q التي تحقق كلفة متوسطة صغرى ، ثم عين هذه الكلفة.

74 بكالوريا

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=30e^{-5x} \quad \text{و} \quad g(x)=e^{5x}+1$$

نقبل أن f و g قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

1. بين أن الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2. بين أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

3. ارسم في نفس المعلم المتعامد التمثيلين البيانيين للدالتين f و g على المجال $[0;0,5]$

الوحدة: $20cm$ من أجل 1 وحدة على محور الفواصل و $0,5cm$ من 1 وحدة على محور التراتيب.

4. الهدف من هذا السؤال حل في $\mathbb{R}$ المعادلة:

$$(E)\ldots. f(x)=g(x)$$

أ- بين أن المعادلة (E) تكتب كما يلي:

$$\left(e^{5x}\right)^2+\left(e^{5x}\right)-30=0$$

ب- حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $X^2+X-30=0$.

جـ- استنتج أن $\frac{\ln 5}{5}$ هو الحل الوحيد للمعادلة (E).

5. في هذا السؤال نعتبر الجزء من المستوي تحت محور الفواصل.

ضلّل في الشكل البياني المرسوم ، الحيز الواقع تحت منحني الدالة f و تحت منحني الدالة g و المحدّد بالمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0,5$ و $x=0$.

- احسب بـ cm^2 المساحة A لهذا الحيز.

- أعط القيمة المضبوطة لمساحة A ثم قيمة مقربة إلى 0,1.

elbassair.net

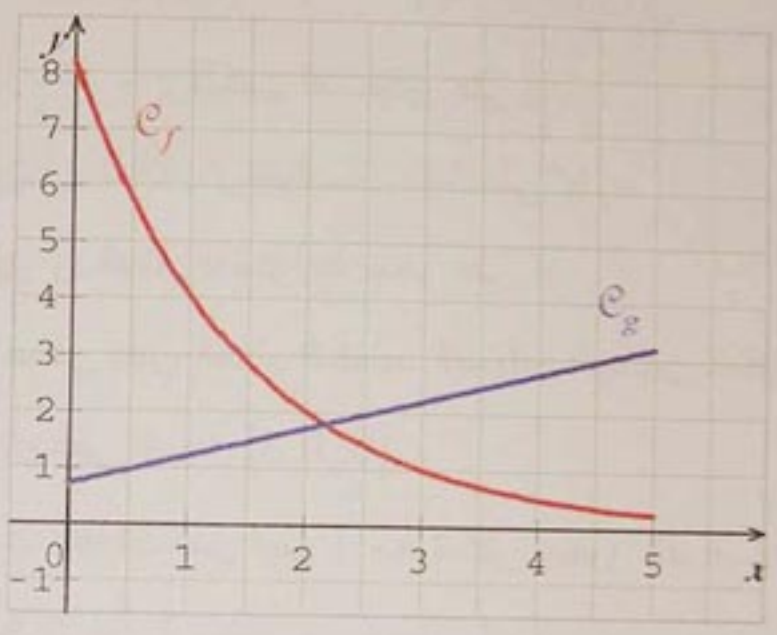
الجزء A:

المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ هو التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد لدالة f معرفة على $[0;5]$ بـــ:

$$f(x)=e^{-0,7x+2,1}$$

المنحنى $(\mathcal{C}_g)$ هو التمثيل البياني لدالة g معرفة على $[0;5]$ بـــ: $g(x)=0,5x+0,7$

نقبل أن الدالتين f و g قابلتين للاشتقاق على $[0;5]$



1.نسمي h الدالة المعرفة بـــ: $h(x)=f(x)-g(x)$

أ-احسب $h'(x)$ حيث h' هي الدالة المشتقة للدالة h على $[0;5]$.

ب- ادرس إشارة $h'(x)$ من أجل كل x من $[0;5]$.استنتج أن الدالة h رتيبة تماما على المجال $[0;5]$.

جـــ- برّر أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا واحدا α على المجال $[0;5]$وأعط باستعمال حاسبة قيمة مقربة إلى 10^{-3} للعدد α.

د- استنتج من الدراسة السابقة القيم المدورة إلى 10^{-2} لإحداثيات نقطة التقاطع F لـــ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$.

2.في ما يلي نأخذ: $\alpha=2,17$ و $f(\alpha)=g(\alpha)=1,79$

أ- لتكن النقط $C(0;f(\alpha))$ و $E(\alpha;0)$.أعط قيمة مقربة إلى 10^{-2} لمساحة المستطيل $OCFE$ مقدرة بوحدة المساحات.

ب-فسر بيانيا العدد $\int_0^{\alpha} f(x)dx$

جـــ- أحسب $\int_0^{\alpha} f(x)dx$ بدلالة α و أعط قيمته المقربة إلى 10^{-2}.

الجزء B :

الدالة f المعرفة في الجزء A ، تمثل دالة الطلب لمنتوج ، حيث $f(x)$ هو الثمن بآلاف الدنانير و x الكمية المنتجة مقدرة بالأطنان و المعدة للاستهلاك بهذا الثمن.

الدالة g المعرفة في الجزء A ، تمثل دالة العرض لهذا المنتوج حيث $g(x)$ هو الثمن بآلاف الدنانير و x الكمية المنتجة مقدرة بالأطنان و المعدة للبيع بهذا الثمن.

نسمي ثمن الموازنة في السوق ، الثمن الذي تكون من أجله الكمية المطلوبة من قبل المستهلكين تساوي الكمية المعروضة من قبل المنتجين.

نرمز بـــ p_0 إلى ثمن الموازنة و q_0 الكمية المبادلة في السوق بهذا الثمن.في الوضعية المدروسة لينا إذن:

$$f(p_0)=g(q_0).$$

1.استنتج من نتائج الجزء A قيمتي p_0 و q_0.

2.كل المستهلكين الجاهزين لدفع ثمن أعلى (أكثر من الثمن p_0) يحققون فائدة اقتصادية.مجموع المبلغ المقتصد من المستهلكين يسمى فائض الإنتاج معرف كما يلي:

$\int_0^{q_0} f(x)dx-p_0\times q_0$ مقدر بآلاف الدنانير.

أ- في التمثيل السابق :

- عين قيمتي p_0 و q_0 على محوري الإحداثيات .

- ضلّل الحيز الذي مساحته $\int_0^{q_0} f(x)dx-p_0\times q_0$

ب- أحسب ، بآلاف الدنانير، فائض الإنتاج.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

76 بكالوريا

الجزء A:

لتكن الدالة f المعرفة و القابلة للاشتقاق على $[0;20]$ بـــ:

$$f(x)=4-3e^{-2x}+7x^2$$

1.بين أن الدالة f متزايدة على المجال $[0;20]$

2. شكل جدول تغيرات الدالة f على المجال $[0;20]$

الجزء B:

لتكن الدالة h المعرفة و القابلة للاشتقاق على $[0;20]$ بـــ:

$$h(x)=85-6e^{-2x}-14x$$

1.أ- بين أنه من أجل كل $x\geq 0$: $12e^{-2x}<14$

ب-استنتج تغيرات الدالة h على $[0;20]$و شكل جدول تغيراتها.

2.أ- بين أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا واحدا α على المجال $[0;20]$ و أن $\alpha\in[6;7]$.

3.بين أن قيمة مقربة إلى 10^{-2} لـــ α بالزيادة هي $6,07$.

في كل الجزء المتبقي من المسألة نعتبر هذه القيمة لـــ α

4. عين إشارة $h(x)$ على $[0;20]$.

لجزء C: تطبيق إقتصادي

في مؤسسة ، كلفة الإنتاج مقدرة بآلاف الدنانير لـــ x جهاز (x مقدر بالمئات) معطاة بالعلاقة:

$C(x)=4-3e^{-2x}+7x^2$ من أجل $x\in[0;20]$

علما أن الجهاز يباع بسعر موحد قدره $850DA$ ، بين أن الفائدة المحققة من طرف المؤسسة من أجل x جهاز منتج و مباع مقدرة بآلاف الدنانير معطاة بـــ:

$$B(x)=3e^{-2x}-7x^2+85x-4$$

2.أ- ادرس اتجاه تغير الدالة B على $[0;20]$.

ب- عين الكمية المنتجة و المباعة حتى تحقق المؤسسة فائدة قصوى ، أعط هذه الكمية مدورة إلى الوحدة.

جـــ- عين باستعمال الحاسبة الكميات التي تنتج و تباع حتى لا تعمل المؤسسة بخسارة.

77 بكالوريا

الجزء A:

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0;5]$ بـــ:

$$f(x)=9x-15-e^{2-0,2x}$$

1. نرمز بـــ f' إلى مشتقة الدالة f . احسب $f'(x)$ و ادرس إشارتها على $[0;5]$

2. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α على المجال $[0;5]$.

أعط حصراً للعدد α سعته 10^{-2} .

4. القيمة المتوسطة لدالة f على مجال $[a;b]$ معطاة بـــ:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

احسب القيمة المتوسطة للدالة f على $[0;5]$.

الجزء B:

في مؤسسة اقتصادية ، كلفة الإنتاج مقدرة بآلاف الدنانير لـــ x وحدة منتجة (العدد x مقدرتبالمئات) هي:

$$C(x)=9x-15-e^{2-0,2x}$$

كل وحدة إنتاجية تباع بـــ $200DA$ ، و لكن 90% فقط من الإنتاج هي التي تباع.

1.علما أن المؤسسة لا تستطيع إنتاج أكثر من 500 وحدة إنتاجية، إلى أي مجال D ينتمي x ؟

2. أ- تحقق أن الدخل R بآلاف الدنانير من أجل إنتاج x وحدة معطى بـــ: $R(x)=18x$.

ب- بين أن الفائدة بآلاف الدنانير المحصل عليها من إنتاج x وحدة معطاة بالدالة B المعرفة على D بـــ :

$$B(x)=9x-15-e^{2-0,2x}$$

3.استنتج من الجزء A :

أ- العدد الأدنى من الوحدات التي تنتجها المؤسسة حتى تحقق فائدة.

ب- القيمة المتوسطة للفائدة ،بآلاف الدنانير، من أجل 500 وحدة إنتاجية الأولى المصنوعة.(أعط النتيجة مدورة إلى الوحدة).

elbassair.net

اختبر معلوماتك

اختيار من متعدد

78 كل سؤال يتضمن إجابة واحدة صحيحة حدّد هذه الإجابة

1. العدد e^{4+2x} يكتب على الشكل:

أ) $\left(e^2\right)^2 \times \frac{1}{e^{2x}}$ ب) $\left(e^{x+2}\right)^2$ جـ) $e^4 + e^{2x}$

2. إذا كانت $f(x) = e^{-x} + \ln x$ فإن:

أ) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ب) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$

جـ) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2e$

3. المتراجحة $e^{-3x+1} < e^{-2x+3}$ تقبل كمجموعة حلول:

أ) $]-\infty;-2[$ ب) $[-2;+\infty[$ جـ) $\left]e^{-2};+\infty\right[$

4. إذا كان $0 < a < b$ فإن:

أ) $\frac{e^a}{e^b} < 1$ ب) $e^{-a} < e^{-b}$ جـ) $e^{\frac{a}{b}} < 1$

79 لتكن f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x) = 2e^{-x} + x + 5$.

1. في معلم معادلة المماس للمنحني الممثل للدالة f عند النقطة التي فاصلتها0 معادلته:

أ) $y = -x + 7$ ب) $y = 3x + 7$ جـ) $y = 7x - 1$

2. نعتبر دالة g جدول تغيراتها هو التالي:

x	5		7
g	-3	↗	1

نضع $h(x) = e^{g(x)}$

أ) h ليست معرفة على $[5;7]$

ب) h متناقصة تماما على $[5;7]$

جـ) h متزايدة تماما على $[5;7]$

3. مجموعة حلول المتراجحة المضاعفة $-1 < e^x < 8$ هي:

أ) $]0;3\ln 2[$ ب) $]-\infty;3\ln 2[$ جـ) $]\ln 8;+\infty[$

4. u دالة معرفة $\mathbb{R}$ على بـ :

$u(x) = (2x+3)e^{2x^2+6x+1}$

دالة أصلية U للدالة u على $\mathbb{R}$ هي :

أ) $U(x) = e^{2x^2+6x+1} - 1$ ب) $U(x) = \frac{1}{2}e^{2x^2+6x+1} + 3$

جـ) $U(x) = (x^2+3x)e^{2x^2+6x+1}$

صحيح أم خاطئ

80 نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x) = e^{-x} - 1$

$(\mathscr{C})$ هو المنحني البياني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس.نرمز بـ f' على مشتقة الدالة f على $\mathbb{R}$ و نرمز بـ F إلى الدالة الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

اذكر إن كانت العبارات التالية صحيحة أم خاطئة

1. $f(\ln 2) = -3$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$
3. $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx > 1$
4. الدالة F متزايدة على المجال $[0;1]$.
5. من اجل كل عدد حقيقي x ،لدينا: $F(x) = 1 - e^{-x} - x$

81 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = xe^{-x}$.

حدّد إن كانت العبارات التالية صحيحة أو خاطئة ، برّر الأجوبة.

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) \times f(-x) \leq 0$
2. من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) + f(x) = e^{-x}$
3. من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) \leq e^{-1}$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} f'(x) = -\infty$
5. الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى عند $x = 1$.

82 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x) = -1 + e^{-x+2}$.

أجب بصحيح أم خاطئ على الجمل الرياضية التالية ، مبررا إجابتك.

1. الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
3. الدالة f سالبة تماما على $]2,+\infty[$ و موجبة تماما على $]-\infty;2[$
4. منحنى الدالة f يقبل المستقيم الذي معادلته $y = -1$ كمستقيم مقارب عند $+\infty$.
5. الدالة $x \mapsto e^{f(x)}$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

موقع البصائر التعليمي

elbassair.net

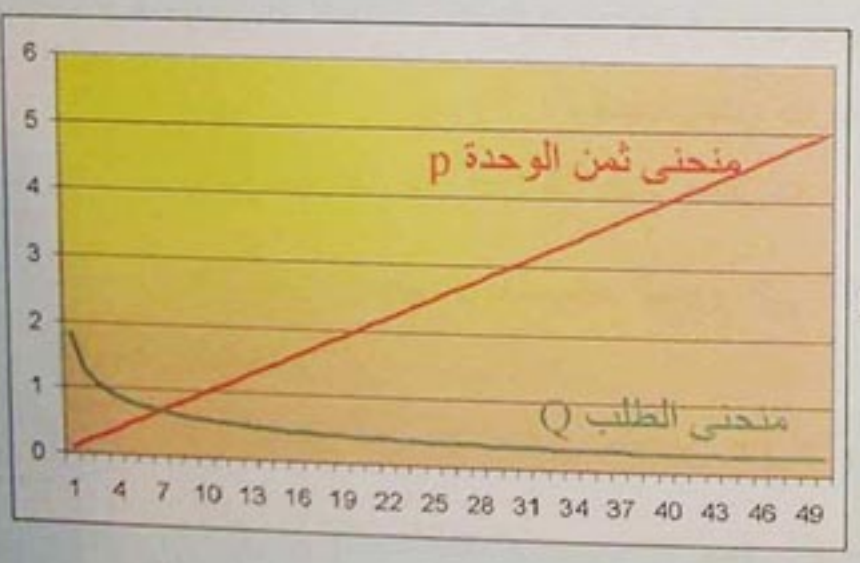
8 التزايد المقارن 8

الكفاءات المستهدفة

- دراسة الدالة اللوغاريتم للأساس a.
- حل مشكلات متعلقة بإيداع أو تسديد تتدخل فيها اللوغاريتمات أو الأسيات.
- دراسة دوال القوى.
- معرفة و تفسير النهايات الخاصة بالتزايد المقارن.

لدراسة مبيعات منتوج ما توصل الباحثون إلى إدراج دالة طلبه التي تعبر عن العلاقة بين الكمية المطلوبة Q و ثمن الوحدة p . على سبيل المثال دالة الطلب لمادة القطن في إحدى الدول في الفترة 1915 – 1929 تعطى بحسب الباحث هونري شولتز بالعلاقة التالية :

$$Q = \frac{0,59}{p^{0,49}}$$



1) أوجد الطلب في الحالات التالية :

أ) $p = 20$ ب) $p = 40$ ج) $p = 53$ د) $p = 56$

2) أوجد ثمن الوحدة في الحالات التالية :

أ) $Q = 0,15$ ب) $Q = 0,22$ ج) $Q = 0,3$

3) مثل بيانيا الدالة : $p \mapsto Q(p)$

- إن دراسة هذا المثال تبين أهمية الدالة الأسية في دراسة ظواهر اقتصادية و توقع نتائج مستقبلية قصد اتخاذ قرارات مسبقة حفاظا على توازن السوق .
- لن تجد أية صعوبة في نهاية الفصل للإجابة عن الأسئلة السابقة . و الذي يهم بالدرجة الأولى هو قراءة الأرقام في المعطيات و النتائج المحصل عليها في الأجوبة قصد ترييض الظاهرة .

elbassair.net

النشاط الأول

من أجل كل عدد حقيقي a موجب تماما و مختلف عن 1، نعتبر الدالة f_a المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f_a(x)=\frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

1. لماذا في رأيك وضع الشرطان: $a>0$ و $a\neq 1$ ؟ تعرف على الدالتين f_e و f_{10}.
2. من أجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n بين أن:

$$f_a(x\times y)=f_a(x)+f_a(y) \quad * \qquad f_a\left(\frac{x}{y}\right)=f_a(x)-f_a(y) \quad * \qquad f_a(x^n)=nf_a(x) \quad *$$

3. بملاحظة أنه من كل x من $]0;+\infty[$، $f_a(x)=\frac{1}{\ln(a)}\times\ln(x)$

- عين اتجاه تغير الدالة f_a (نميز حالتين).
- عين نهايتي الدالة f_a عند 0 و عند $+\infty$. أحسب $f_a(a)$ و $f_a(1)$ ثم شكل جدول تغيراتها.
- أرسم المنحنى (C_a) الممثل للدالة f_a في معلم متعامد و متجانس (نميز حالتين).

تعريف: تسمى f_a الدالة اللوغاريتم للأساس a و نرمز إليها بالرمز " $\log_a$ "

النشاط الثاني

1) تعريف القوى الحقيقية للعدد 3

- ليكن n عددا صحيحا نسبيا. أكتب العدد $\ln(3^n)$ بكيفية أخرى ثم استنتج أن $3^n=e^{n\ln 3}$.

الدستور $3^n=e^{n\ln 3}$ يمنحنا فكرة تمديد مفهوم القوى. هذا التمديد يفرض علينا طرح السؤال التالي:

كيف يمكن تعريف 3^x من أجل كل عدد حقيقي x ؟

نضع، تعريفا، من أجل كل عدد حقيقي x، $3^x=e^{x\ln 3}$

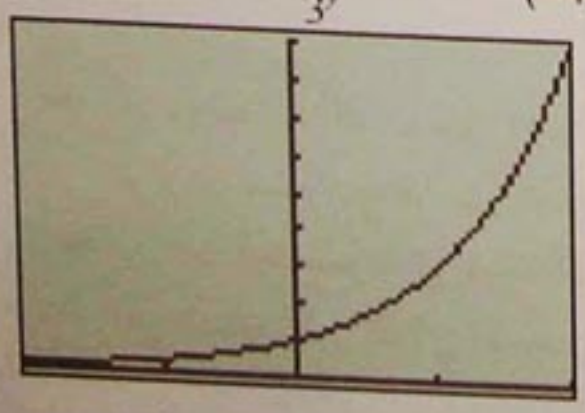
- عين، باستعمال حاسبة، المدور إلى 10^{-2} لكل عدد من الأعداد التالية: $3^{\frac{1}{3}}$، 3^e، $3^{-\frac{2}{5}}$ و $3^{\sqrt{2}}$

2) بعض الدساتير

بين أنه من أجل كل عددين حقيقيين x، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n،

أ) $3^x\times 3^y=3^{x+y}$ ب) $(3^x)^n=3^{nx}$ جـ) $\frac{3^x}{3^y}=3^{x-y}$

3) دالة جديدة



- أرسم على شاشة حاسبة بيانية التمثيل البياني للدالة $f: x\mapsto 3^x$.
- أدرس اتجاه تغير الدالة f.
- عين نهايتي الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

تعريف: تسمى الدالة $x\mapsto 3^x$ " الدالة الأسية ذات الأساس 3.

elbassair.net
موقع عيون البصائر التعليمي

النشاط الثالث

1. دراسة الدالة المعرفة على $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=x^3$

- أدرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.
- أرسم (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس.

2. المعادلة $x^3=3$

- بين أن المعادلة $x^3=3$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0;+\infty[$.
- باستعمال حاسبة بيانية عين حصرا سعته 10^{-2} للعدد α.

نتيجة: العدد α هو إذن العدد الموجب الوحيد الذي يحقق: $\alpha^3=3$.

يسمى العدد α الجذر التكعيبي للعدد 3 و نرمز إليه بالرمز $\sqrt[3]{3}$.

تعريف: نسمي الجذر التكعيبي للعدد الموجب a العدد الموجب الوحيد x حيث $x^3=a$ و نرمز إليه بـ $\sqrt[3]{a}$.

1. حساب بعض الجذور التكعيبية

- عين الأعداد التالية: $\sqrt[3]{8}$ ، $\sqrt[3]{125}$ ، $\sqrt[3]{1000}$ ، $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$.
- عين حصرا سعته 10^{-2} للعددين: $\sqrt[3]{2}$ و $\sqrt[3]{11}$.
- برهن العلاقات التالية:

أ) $\sqrt[3]{16}=2\times\sqrt[3]{2}$ ب) $\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{10}$ جـ) $\frac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{5}}=\sqrt[3]{3}$.

2. باستعمال قوى حقيقية للعدد 3

لقد عرفنا في النشاط الثاني العدد $3^{\frac{1}{3}}$. بين أن $\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}$.

النشاط الرابع

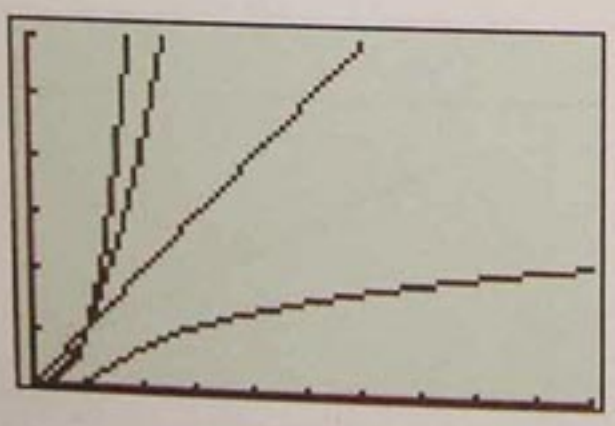
1. مقارنة $\ln(x)$ و x^n

باستعمال حاسبة بيانية خمن على المجال $[0;+\infty[$

الأوضاع النسبية للمنحنى الممثل للدالة $x\mapsto\ln(x)$

بالنسبة لمنحنيات الدوال $x\mapsto x$ ، $x\mapsto x^2$ و $x\mapsto x^3$

ثم قارن بين $\ln x$ و x^n من أجل $n=1$، $n=2$ و $n=3$



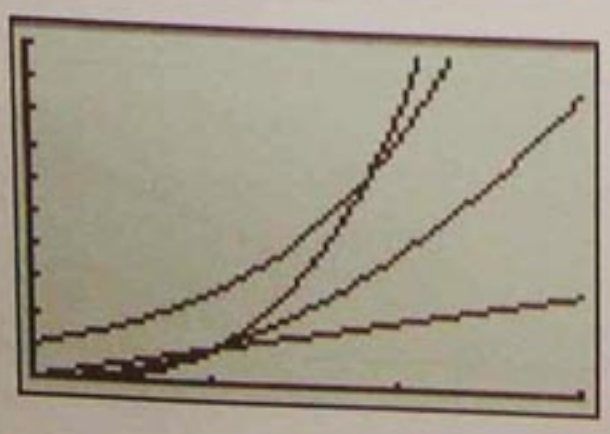
2. مقارنة e^x و x^n

باستعمال حاسبة بيانية خمن على المجال $[0;+\infty[$

الأوضاع النسبية للمنحنى الممثل للدالة $x\mapsto e^x$

بالنسبة لمنحنيات الدوال $x\mapsto x$ ، $x\mapsto x^2$ و $x\mapsto x^3$

ثم قارن بين e^x و x^n من أجل $n=1$، $n=2$ و $n=3$



elbassair.net

ـ دالة اللوغاريتم للأساس a

1. تعريف دالة اللوغاريتم للأساس a

تعريف: a عدد حقيقي موجب تماما و مختلف عن 1.

نسمي دالة اللوغاريتم للأساس a الدالة التي نرمز إليها بالرمز $\log_a$ و المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $\log_a(x)=\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$

- إذا كان $a=e$ فإن $\log_a(x)=\ln(x)$ لأن $\ln(e)=1$. إذن دالة اللوغاريتم للأساس e هي الدالة " $\ln$ ".
- إذا كان $a=10$ تسمى دالة اللوغلريتم للأساس 10 دالة اللوغاريتم العشري و نرمز إليها بالرمز " $\log$ "

2. خواص الدالة $\log_a$

خواص: من أجل كل x، y من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

$$\log_a(x\times y)=\log_a(x)+\log_a(y) \quad (1)$$

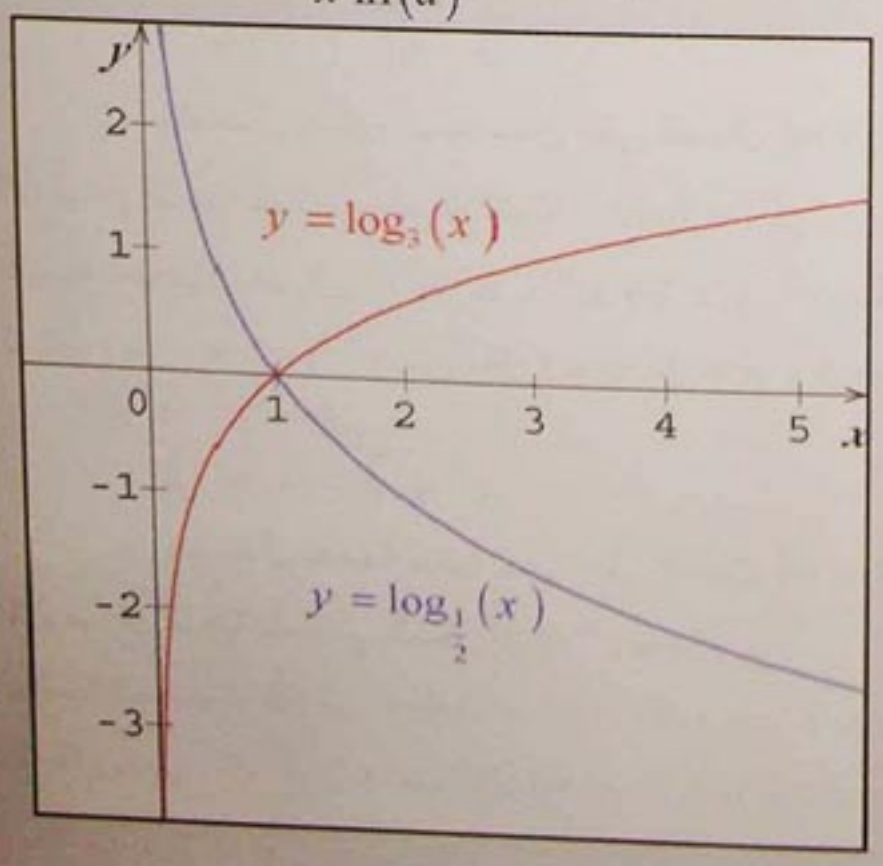
$$\log_a\left(\frac{1}{y}\right)=-\log_a(y) \quad (2) \quad \text{و} \quad \log_a\left(\frac{x}{y}\right)=\log_a(x)-\log_a(y)$$

$$\log_a\left(x^n\right)=n\log_a(x) \quad (3)$$

3. التغيرات و التمثيل البياني للدالة $\log_a$

من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\log_a(x)=\dfrac{1}{\ln(a)}\times\ln(x)$ و هي من الشكل $\log_a(x)=k\times\ln(x)$ و منه:

- إذا كان $0<a<1$ فإن $\ln(a)<0$ و بالتالي تكون الدالة $\log_a$ متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.
- إذا كان $a>1$ فإن $\ln(a)>0$ و بالتالي تكون الدالة $\log_a$ متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$.
- الدالة $\log_a$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $(\log_a)'(x)=\dfrac{1}{x\ln(a)}$



x	0	a	1	$+\infty$
$\log_a(x)$	$+\infty$	↘	0	$-\infty$

x	0	1	a	$+\infty$
$\log_a(x)$	$-\infty$	↗	0	$+\infty$

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

تمرين محلول1: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$\log_{0,5}(2x+2)=\log_{0,5}(x+3)$ (1) و $\log_{0,5}(2x+2)>\log_{0,5}(x+3)$ (2)

طريقة: نبدأ أولا بتعيين D مجموعة تعريف المعادلة (على التوالي المتراجحة).

الحل:

1. تكون المعادلة (1) معرفة من أجل كل عدد حقيقي x حيث $2x+2>0$ و $x+3>0$

و هذا يعني $x>-1$ و $x>-3$ و منه مجموعة تعريفها هي $D=]-1;+\infty[$.

من أجل كل x من D، (1) تعني $2x+2=x+3$ أي $x=1$ و بما أن 1 ينتمي إلى D

فإن مجموعة الحلول هي $S=\{1\}$.

2. مجموعة تعريف المتراجحة (2) هي $D=]-1;+\infty[$.

من أجل كل x من D، (1) تعني $2x+2<x+3$ لأن $0,5<1$ أي $x<1$ و بالتالي

فإن مجموعة الحلول هي $S=]-1;1[$.

تمرين محلول2: حل المعادلة التالية: $2[\log(x)]^2+\log(x)-6=0$

طريقة: لحل معادلة من الشكل $a[\log(x)]^2+b\log(x)+c=0$ مع $a\neq 0$ نضع $X=\log x$.

نقوم بعد ذلك بحل المعادلة $aX^2+bX+c=0$ ثم نستنتج قيم x في حالة وجودها.

الحل: مجموعة تعريف المعادلة هي $D=]0;+\infty[$.

بوضع $X=\log x$ نحصل على المعادلة $2X^2+X-6=0$ ذات الحلين -2 و $\frac{3}{2}$.

$\log x=-2$ تعني $\log x=\log(10^{-2})$ أي $x=10^{-2}$.

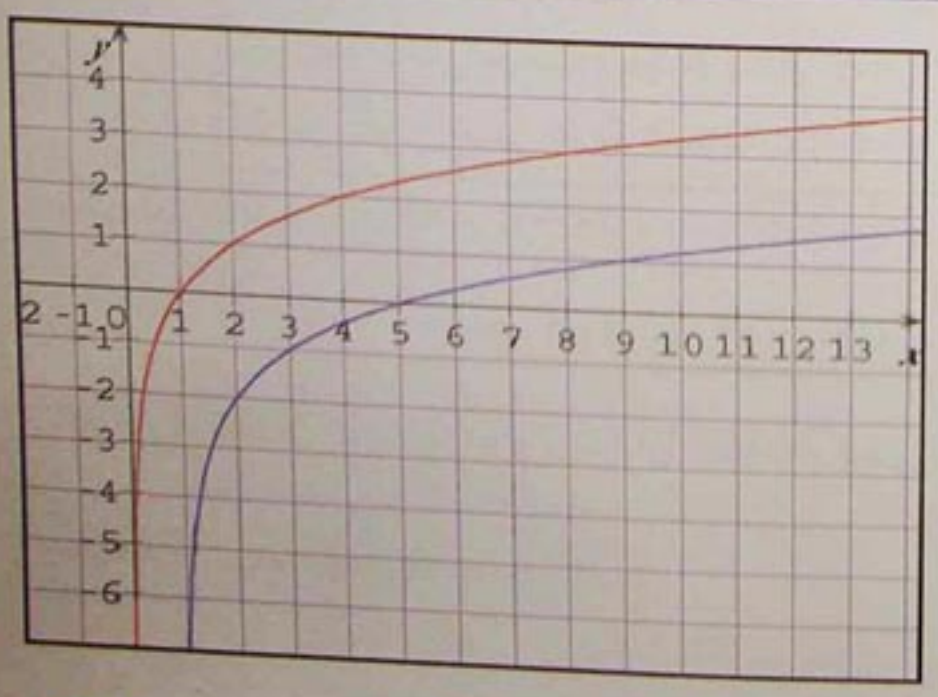
و $\log x=\frac{3}{2}$ تعني $\frac{\ln x}{\ln 10}=\frac{3}{2}$ أي $\ln(x^2)=\ln(10^3)$ و هذا يعني $x^2=10^3$ و منه $x=\sqrt{10^3}$.

مجموعة الحلول هي $S=\{10^{-2};\sqrt{10^3}\}$.

تمرين محلول3: نعتبر الدالة f المعرفة على $]1;+\infty[$ بـ: $f(x)=-2+\log_2(x-1)$

عين اتجاه تغير الدالة f ثم أرسم المنحنى الممثل للدالة f انطلاقا من التمثيل البياني للدالة $x\mapsto\log_2(x)$.

الحل:



للدالتين f و $x\mapsto\log_2(x-1)$ نفس اتجاه التغير

كما أن الدالة $x\mapsto\log_2(x-1)$ هي مركب الدالة

$x\mapsto x-1$ متبوعة بالدالة $x\mapsto\log_2(x)$ و بما أن

هاتين الدالتين متزايدتين فإن الدالة $x\mapsto\log_2(x-1)$

متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و عليه فالدالة f

متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$.

منحنى الدالة f هو صورة المنحنى الممثل للدالة

$x\mapsto\log_2(x)$ بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{u}(1;-2)$

elbassair.net

ـ قوى عدد حقيقي موجب تماما

تمهيد: a عدد حقيقي موجب تماما و n عدد صحيح نسبي. نعلم أن $\ln\left(a^n\right)=n\ln a$ و بالتالي $a^n=e^{n\ln a}$.

وبما أن $\ln e=1$ فإن من أجل كل عدد حقيقي x، $e^x=e^{x\ln e}$.

1. تعاريف

تعريف1: نضع $a^b=e^{b\ln a}$ من أجل كل عددين حقيقيين a و b حيث $a>0$ و b كيفي.

ملاحظة: يقرأ a^b: " a أس b " أو " a قوى b "

مثال: $2^{\sqrt{3}}=e^{\sqrt{3}\ln 2}\approx 3,3219$

تعريف2: a عدد حقيقي موجب تماما ومختلف عن 1.

تسمى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=a^x=e^{x\ln a}$ ، الدالة الأسية ذات الأساس a.

2. قواعد الحساب

خواص: من أجل كل a، b من $]0;+\infty[$ و من أجل كل x، y من $\mathbb{R}$ لدينا:

(1) $\ln\left(a^x\right)=x\ln a$ (2) $a^x a^y=a^{x+y}$ (3) $a^{-y}=\dfrac{1}{a^y}$ (4) $\dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$.

(5) $\left(a^x\right)^y=a^{xy}$. (6) $(ab)^x=a^x b^x$. (7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x=\dfrac{a^x}{b^x}$.

البرهان: أنظر التمرين رقم 16 (يتم إنجاز مختلف البراهين باستعمال العلاقة $a^x=e^{x\ln a}$).

x	0	$+\infty$
x^n	0 ↗	$+\infty$

3. الدالة الجذر النوني

تمهيد: الدالة $f_n: x\mapsto x^n$ ، حيث n عدد طبيعي غير معدوم، مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$ كما أن $f_n(0)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty$. إذن من أجل كل عدد حقيقي موجب a، المعادلة $x^n=a$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0;+\infty[$.

مبرهنة و تعريف: من أجل كل عدد حقيقي موجب a و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، يوجدعدد حقيقي موجب وحيد b يحقق $b^n=a$. يسمى b الجذر النوني للعدد a و نرمز إليه بالرمز $\sqrt[n]{a}$ و تسمى الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $x\mapsto\sqrt[n]{x}$، الدالة الجذر النوني.

مثال: $\sqrt[5]{0}=0$ ، $\sqrt[5]{1}=1$ ، $\sqrt[3]{8}=2$ ، $\sqrt[4]{81}=3$ ، $\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}$.

خاصية: من أجل كل a من $]0;+\infty[$ و من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.

البرهان: نعلم أن $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n=a$ و بما أن $\sqrt[n]{a}$ هو الحل الموجب الوحيد للمعادلة $x^n=a$ فإن $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$.

ملاحظة: نضع اصطلاحا: $0^{\frac{1}{n}}=0$.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

تمرين محلول1: اختزل كتابات الأعداد التالية:

$$a = 256^{\frac{1}{4}} \qquad b = (0,25)^{1,5} \qquad c = 3^{-\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}}$$

الحل:

- $a = 256^{\frac{1}{4}} = \left(2^8\right)^{\frac{1}{4}} = 2^{8\times\frac{1}{4}} = 2^2 = 4$.
- $b = (0,25)^{-1,5} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(2^{-2}\right)^{-\frac{3}{2}} = 2^{(-2)\left(-\frac{3}{2}\right)} = 2^3 = 8$
- $c = 3^{-\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}} \times \left(3^2\right)^{\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}} \times 3^{2\times\frac{2}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}} = 3^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} = 3$

تمرين محلول2:

1. عين الدالة المشتقة للدالة f_n المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $f_n(x) = \sqrt[n]{x}$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة g المعرفة على $]-\infty;-1[$ بـ $g(x) = \sqrt[3]{x^2-1}$.

الحل:

1. من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f_n(x) = x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln x}$.

الدالة f_n هي مركب الدالة $x \mapsto \frac{1}{n}\ln x$ متبوعة بالدالة الأسية وبالتالي فهي قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا: $f_n'(x) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} e^{\frac{1}{n}\ln x} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{x} \times x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \times x^{\frac{1}{n}-1}$. نلاحظ أن طريقة الحساب تبقى نفسها المطبقة بالنسبة لدوال القوى ذات أس صحيح.

من الواضح أن من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f_n'(x) > 0$ و منه فالدالة الجذر النوني متزايدة تماما على $]0;+\infty[$.

2. نلاحظ أن الدالة g هي مركب الدالتين $x \mapsto x^2-1$: u متبوعة بالدالة f_3. و بما أن الدالة u متناقصة تماما على $]-\infty;-1[$ و الدالة f_3 متزايدة تماما على $]0;+\infty[$ فإن الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;-1[$.

تمرين محلول3: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

$$3^x + 2\times 3^{-x} = 3 \quad (1) \qquad (0,31)^{2x} < 3 \quad (2)$$

الحل:

1. (1) تعني $3^x + \frac{2}{3^x} = 3$ أي $3^{2x} - 3\times 3^x + 2 = 0$. بوضع $X = 3^x$ نحصل على $X^2 - 3X + 2 = 0$ ذات الحلين 1 و 2. $3^x = 1$ تعني $\ln 3^x = \ln 1$ أي $x\ln 3 = 0$ و بالتالي $x = 0$.

أما $3^x = 2$ فتعني $x\ln 3 = \ln 2$ أي $x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$. و منه مجموعة الحلول هي $S = \left\{0; \frac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$.

2. $(0,31)^{2x} < 3$ تعني $\ln\left[(0,31)^{2x}\right] < \ln 3$ أي $2x\ln(0,31) < \ln 3$ و هذا يعني أن $x > \frac{\ln 3}{2\ln(0,31)}$ لأن $\ln(0,31) < 0$ و بالتالي مجموعة الحلول هي $\left]\frac{\ln 3}{2\ln(0,31)}; +\infty\right[$.

elbassair.net

دراسة الدوال $x \mapsto a^x$ و $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

1. الدالة $x \mapsto a^x$

نضع من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما a و مختلف عن 1 و من أجل x من $\mathbb{R}$ ، $f_a(x)=a^x=e^{x\ln a}$

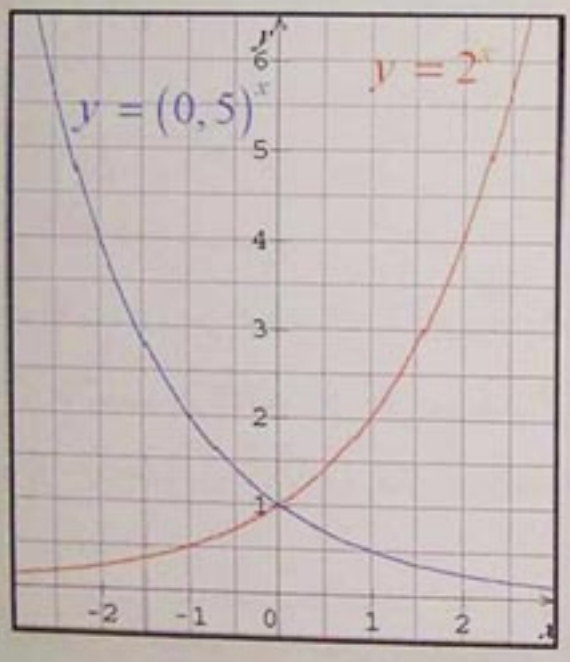
- **اتجاه التغير:** الدالة f_a هي مركب الدالة $u: x \mapsto x\ln a$ متبوعة بالدالة الأسية. و بما أن الدالتين u و"exp" قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة f_a قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا: $f_a'(x)=\ln a \times e^{x\ln a}=(\ln a)a^x$.

نعلم أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $a^x>0$ و بالتالي فإشارة $f_a'(x)$ من نفس إشارة $\ln a$. و منه النتائج التالية:

* إذا كان $0<a<1$ فإن $\ln a<0$ و منه الدالة f_a متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.
* إذا كان $a>1$ فإن $\ln a>0$ و منه الدالة f_a متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

- **النهايات:** نميز حالتين حسب إشارة $\ln a$

* إذا كان $0<a<1$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ نستنتج أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)=+\infty$
* إذا كان $0<a<1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)=0$
* إذا كان $a>1$ فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln a=-\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X=0$ نستنتج أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f_a(x)=0$
* إذا كان $a>1$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln a=+\infty$ و بما أن $\lim\limits_{X\to+\infty} e^X=+\infty$ نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f_a(x)=+\infty$



$f_a(1)=a$
$f_a(0)=1$

- **جدول التغيرات و التمثيل البياني:**

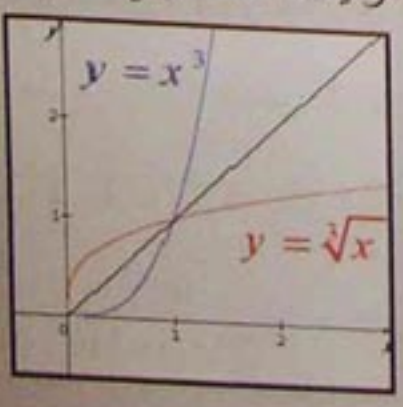
x	$-\infty$	$+\infty$
$f_a(x)$ $0<a<1$	$+\infty$ ↘	0

x	$-\infty$	$+\infty$
$f_a(x)$ $a>1$	0 ↗	$+\infty$

2. الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$

نضع من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، و من أجل x من $[0;+\infty[$ ، $g_n(x)=\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$.

g_n قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و $g_n'(x)=\frac{1}{n}\times x^{\frac{1}{n}-1}$ و منه $g_n'(x)>0$. إذن g_n متزايدة تماما على $[0;+\infty[$



ملاحظة

الدالة g_n غير قابلة للاشتقاق عند 0.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[n]{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln x}=+\infty$

x	0	$+\infty$
$g_n'(x)$	‖	$+$
$g_n(x)$	0 ↗	$+\infty$

elbassair.net
موقع البصائر التعليمي

تمرين محلول1:

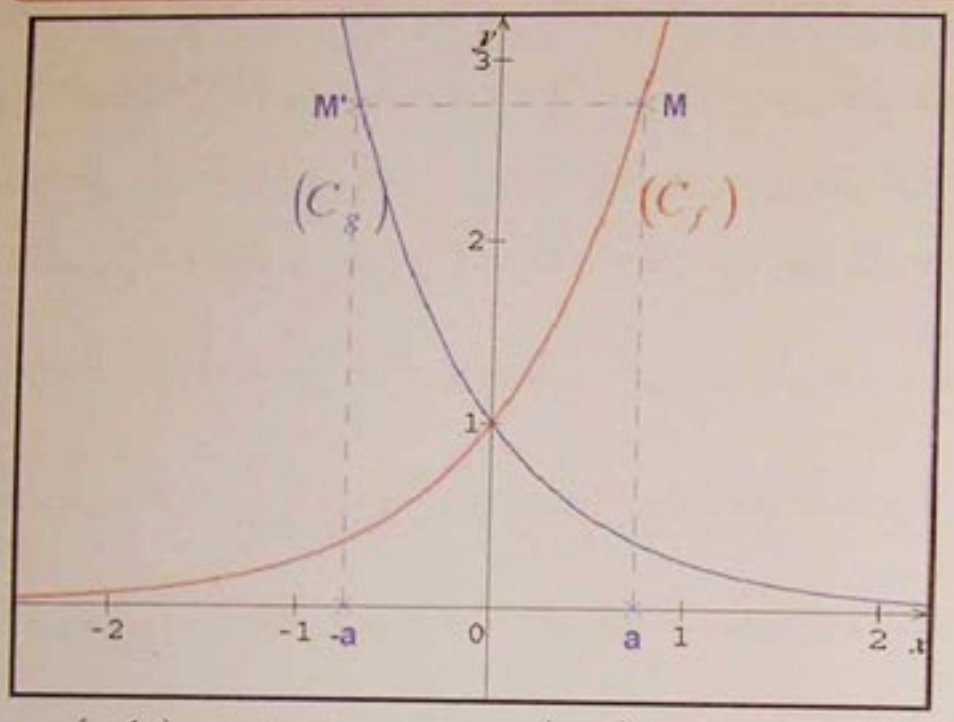
1. أرسم في معلم متعامد و متجانس المنحنيين (C_f) و (C_g) الممثلين على التوالي للدالتين f و g حيث:

$$f(x)=4^x \quad \text{و} \quad g(x)=(0,25)^x$$

2. بين أن المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى محور التراتيب $(y'y)$.

طريقة: لإثبات أن المنحنيين (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى $(y'y)$ يمكننا أن نبين أن:

$g(-x)=f(x)$ أو $f(-x)=g(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.



الحل:

1. الدالتان f و g معرفتان على $\mathbb{R}$.

الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

الدالة g متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

2. من أجل كل a من $\mathbb{R}$ لدينا:

$g(-a)=(0,25)^{-a}=e^{-a\ln(0,25)}$ و منه

$g(-a)=e^{-a\ln\frac{1}{4}}=e^{a\ln 4}=4^a$. إذن $g(-a)=g(a)$. و منه (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة إلى $(y'y)$.

تمرين محلول2: أكتب العبارات التالية بواسطة أس ناطق.

(1) $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}$ (2) $g(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+1}$ (3) $h(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt[4]{x+1}}$

الحل:

1. $f(x)=(x-1)\sqrt{x-1}=(x-1)(x-1)^{\frac{1}{2}}=(x-1)^{1+\frac{1}{2}}=(x-1)^{\frac{3}{2}}$.

2. $g(x)=\sqrt[3]{x^2+2x+1}=(x^2+2x+1)^{\frac{1}{3}}=\left[(x+1)^2\right]^{\frac{1}{3}}=(x+1)^{2\times\frac{1}{3}}=(x+1)^{\frac{2}{3}}$.

3. $h(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt[4]{x+1}}=\dfrac{x+1}{(x+1)^{\frac{1}{4}}}=(x+1)(x+1)^{-\frac{1}{4}}=(x+1)^{1-\frac{1}{4}}=(x+1)^{\frac{3}{4}}$.

تمرين محلول3: حل المعادلة و المتراجحة التاليتين: (1) $\sqrt[3]{x}=4$ (2) $\sqrt[5]{x+1}\le 2$

الحل:

1. مجموعة تعريف (1) هي $[0;+\infty[$.

من أجل كل x من $[0;+\infty[$، (1) تعني $x=4^3$ و منه مجموعة الحلول هي $S=\{4^3\}$.

2. مجموعة تعريف (2) هي $[-1;+\infty[$.

من أجل كل x من $[-1;+\infty[$، (2) تعني $x+1\le 2^5$ أي $x\le 2^5-1$ و بالتالي $x\le 31$.

مجموعة الحلول هي إذن: $S=[-1;31]$.

elbassair.net

التزايد المقارن

1. التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto e^x$ و $x \mapsto x$

خواص: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

البرهان:

1. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ $f(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$. لدينا من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x)=e^x-x$ و $f''(x)=e^x-1$. بما أن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f''(x)\geq 0$ فإن الدالة f' متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و علما أن $f'(0)=1$ فإن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f'(x)\geq 0$ و منه فالدالة f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$ و علما أن $f(0)=1$ فإن من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $f(x)\geq 0$. نستنتج أنه من أجل كل x من $[0;+\infty[$، $e^x-\dfrac{x^2}{2}\geq 0$ و بالتالي فإن من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $\dfrac{e^x}{x}\geq\dfrac{x}{2}$. باستعمال النهايات بالمقارنة و علما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{2}=+\infty$ فإن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ كما نستنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$.

2. نضع $X=-x$. إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}X=+\infty$ و منه: $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=\lim\limits_{X\to+\infty}-Xe^{-X}=\lim\limits_{X\to+\infty}-\dfrac{X}{e^X}=0$

2. التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x$

خواص: (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و (2) $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$

البرهان:

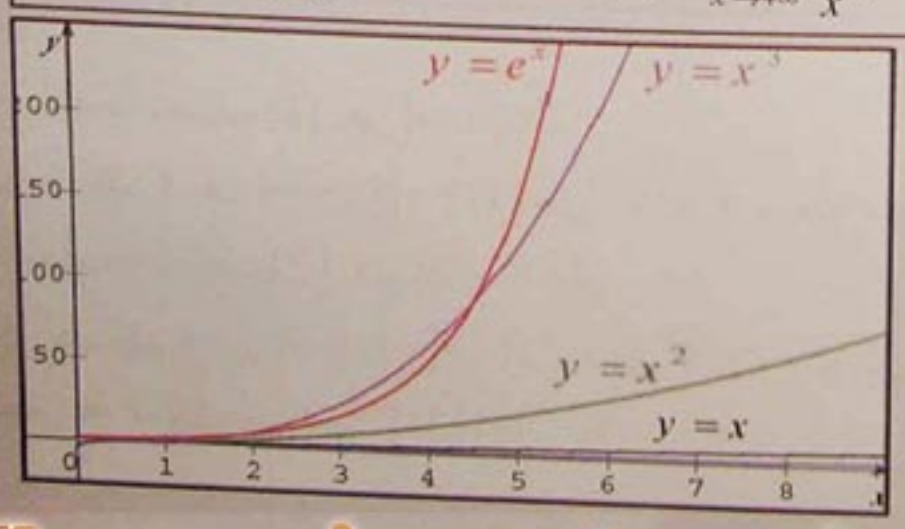
1. من أجل $x>0$ نضع $X=\ln x$ و منه $x=e^X$ مع $\lim\limits_{x\to+\infty}X=+\infty$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{X}{e^X}=0$

2. نضع $X=\dfrac{1}{x}$ و منه $\lim\limits_{x\to0}X=+\infty$ و بالتالي $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{1}{X}\ln\dfrac{1}{X}=\lim\limits_{X\to+\infty}-\dfrac{\ln X}{X}=0$

3. التزايد المقارن مع الدالة $x \mapsto x^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$

خواص (دون برهان): (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$ (2) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$ (4) $\lim\limits_{x\to0}x^n\ln x=0$



خلاصة: كل الدوال $x \mapsto e^x$ ، $x \mapsto \ln x$ و $x \mapsto x^n$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ تؤول إلى $+\infty$ لما يؤول x إلى $+\infty$ إلا أن سلوكها مختلف.

عند اللانهاية تتفوق الدالة الأسية على الدالة قوة و تتفوق الدالة قوة على الدالة اللوغاريتمية النيبيرية.

elbassair.net
موقع البصائر التعليمي

تمرين محلول1: أحسب النهايتين التاليتين:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^x$

طريقة: لرفع حالات عدم التعيين يمكننا استعمال النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

الحل:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و من تم $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)=+\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2xe^x-e^x\right)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

تمرين محلول2: أحسب النهايتين التاليتين:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln x\right)$ 2) $\lim\limits_{x\to0}(x+2)\ln x$

طريقة: لرفع حالات عدم التعيين يمكننا استعمال النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$

الحل:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[1-\dfrac{\ln x}{x}\right]=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ و من تم $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-\dfrac{\ln x}{x}\right]=1$.
2. $\lim\limits_{x\to0}(x+2)\ln x=\lim\limits_{x\to0}(x\ln x+2\ln x)=-\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ و $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$.

تمرين محلول3: أحسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{x^2+x+1}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{2x^2-x+3}$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+2x-1\right)e^x$ 4) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+x\right)\ln x$

الحل:

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x}{x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}2\dfrac{e^x}{x^2}\times\dfrac{x^2}{x^2+x+1}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2+x+1}=1$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}=+\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{2x^2-x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}\times\dfrac{x^2}{2x^2-x+3}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{2x^2-x+3}=\dfrac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}=0$.
3. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+2x-1\right)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3e^x+2xe^x-e^x\right)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.
4. $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2+x\right)\ln x=\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\ln x+x\ln x\right)=0$ لأن $\lim\limits_{x\to0}x^n\ln x=0$.

تمرين محلول4: أحسب النهاية التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(2x-1)e^x-3e^{2x}\right]$

الحل:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(2x-1)e^x-3e^{2x}\right]=\lim_{x\to+\infty}e^{2x}\left(2\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}-3\right)=-\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}=+\infty$.

elbassair.net

نموذج ديموغرافي

نهدف إلى نمذجة تطور مجتمع من الطفيليات في زراعة بأحد الحقول.

نرمز بـ $N(t)$ إلى عدد الطفيليات بالمئات عند اللحظة t (بالأيام).

أسفرت بعض الملاحظات على النتائج التالية:

t	0	1	3	6	10
$N(t)$	10	11	12	15	18

- فريق أول من البيولوجيين نمذج هذا التطور بالدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(t)=10\times(1,07)^t$$

- و نمذج فريق ثاني نفس التطور السابق بالدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(t)=\frac{100}{1+9\times(1,07)^{-t}}$$

1. دراسة بيانية

- باستعمال جداول حاسبة بيانية و باختيار الخطوة1 عين قيم الدالتين f و g على المجال $[0;10]$.
- في معلم متعامد (الوحدات: $1cm$ يمثل يوما واحدا على محور الفواصل و $1cm$ يمثل مائة من الطفيليات على محور التراتيب و نبدأ التدريج ابتداء من 9 على محور التراتيب) مثل جدول القيم السابق و الجداول المحصل عليها بالحاسبة.

2. دراسة الدالة f

- اشرح لماذا الفريق الأول يعتبر أن عدد الطفيليات يرتفع يوميا بنسبة 7% .
- أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$.
- أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$.
- أرسم على شاشة حاسبة بيانية المنحني الممثل للدالة f على المجال $[0;80]$.

3. دراسة الدالة g

- أدرس اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.
- أدرس نهاية الدالة g عند $+\infty$.
- أرسم على شاشة حاسبة بيانية المنحني الممثل للدالة g على المجال $[0;80]$.

4. التركيب:

قارن بين النموذجين المقترحين من قبل كل فريق من فريقي البيولوجيين.

يستعمل الفريق الأول نموذج " *Malthus* " و الذي يعتبر أن نسبة التطور تبقى ثابتة بينما يعمل الفريق الثاني وفق نموذج " *Verhulst* " الذي يفرض أن نسبة التطور تنقص و من تم لا يتعدى المجتمع حدا معينا.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

فاتورة الهاتف

تعيين دالة: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـــ:

$f(x)=(ax+b)e^{-\frac{x}{3}}+3$ حيث a و b عددان حقيقيان.

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;I,J)$ حيث وحدتا الطول هما $1cm$ على محور الفواصل و $5cm$ على محور التراتيب.

1. أحسب $f'(x)$ من أجل كل x من $]0;+\infty[$.
2. عين a و b علما أن الدالة f تقبل قيمة حدية عظمى عند 4 و أن النقطة $A(0;2)$ تنتمي إلى المنحني (C)

دراسة دالة: نفرض في ما يأتي $a=1$ و $b=-1$. لدينا إذن:

من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f(x)=(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3$

3. أدرس نهاية الدالة f عند $+\infty$. استنتج أن المنحني (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.
4. حدد وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ).
5. أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.
6. أعد رسم الجدول الموالي ثم أملئه (تدور النتائج إلى 10^{-2}).

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(x)$									

7. أرسم المستقيم المقارب (Δ) و المنحني (C).

دراسة اقتصادية: سجلت في الجدول الموالي مبالغ فواتير استهلاك الهاتف (سنويا) مقدرة بعشرات الآلاف من الدنانير من قبل إحدى الثانويات بحيث يمثل x_i رتبة السنة بينما يمثل y_i مبلغ فاتورة تلك السنة.

السنة	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65	3,55	3,50

نبحث عن دالة تسمح من نمذجة هذه الظاهرة بشكل مناسب.

نقول عن دالة f أنها مقبولة إذا كان من أجل كل x_i، $|f(x_i)-y_i|\leq 0,1$.

1. مثل في المعلم السابق $(O;I,J)$ النقط $M_i(x_i;y_i)$.
2. بين أن الدالة f مقبولة لنمذجة الظاهرة السابقة.
3. صرح المسير المالي للثانوية أنه لو استمر تطور استهلاك الهاتف وفق النموذج السابق فإنه يأمل بلوغ فاتورة لا يتعدى مبلغها $30000\,DA$.

هل أنت موافق مع هذا التصريح ؟ علل إجابتك.

elbassair.net

دراسة دالة لوغاريتمية

الجزء الأول: نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=x+1+\ln x$

1. عين نهايتي الدالة g عند 0 و عند $+\infty$.
2. أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
3. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$.
4. باستعمال حاسبة بيانية أوجد حصرا للعدد α سعته $0,01$.
5. حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

الجزء الثاني:

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$f(0)=0$ و من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $f(x)=\dfrac{x\ln x}{x+1}$

ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ حيث وحدة الأطوال هي $4cm$.

1. بين أن الدالة f مستمرة على $]0;+\infty[$.
2. هل تقبل الدالة f الاشتقاق عند 0 ؟ فسر بيانيا النتيجة.
3. من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، بين أن $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$. استنتج اتجاه تغير الدالة f.
4. أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$. تحقق أن $f(\alpha)=\alpha$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.
5. ليكن (Γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ في المعلم $(O;I,J)$.
   - أدرس الأوضاع النسبية للمنحنيين (C) و (Γ).
   - أحسب النهاية: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\ln x\right]$. فسر بيانيا النتيجة. أرسم المنحنيين (C) و (Γ).

مسألة استمثال

ليكن (Γ) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto \ln x$ في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$.

مسألة: نهدف إلى تعيين (إن وجدت) نقط المنحني (Γ) الأقرب من المبدأ O.

1. نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=x^2+\ln x$
   - عين نهايتي الدالة g عند 0 و عند $+\infty$.
   - أدرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.
   - بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$. عين قيمة مقربة للعدد α.
   - حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.
2. نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=x^2+(\ln x)^2$

   أدرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.
3. حل المسألة المطروحة.

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

مقارنة الأعداد الطبيعية n^{n+1} و $(n+1)^n$

الهدف: مقارنة العددين الطبيعيين n^{n+1} و $(n+1)^n$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.

1. علما أن التعامل مع القوى غالبا ما يتطلب إدخال اللوغاريتم بين أن:

$n^{n+1} > (n+1)^n$ يعني $\dfrac{\ln(n)}{n} > \dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$

2. اختر دالة مناسبة يمكن أن تسمح دراسة اتجاه تغيراتها من المقارنة بين العددين $\dfrac{\ln(n)}{n}$ و $\dfrac{\ln(n+1)}{n+1}$

أدرس تغيرات هذه الدالة ثم استنتج.

الدوال $x \mapsto x^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R})$

نعتبر الدالة f_α المعرفة من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ كما يلي:

$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ حيث α عدد حقيقي.

1. ماذا يمكن القول عن الدالة f_α في حالة $\alpha = 0$ ؟ في حالة $\alpha = 1$ ؟

في ما يلي نفرض $\alpha \neq 0$ و $\alpha \neq 1$.

2. أدرس نهايتي الدالة f_α عند 0 و عند $+\infty$. نميز الحالتين: $\alpha < 0$ و $\alpha > 0$.

3. بين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$، $f_\alpha'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. ماذا تلاحظ ؟

4. نفرض $\alpha < 0$

- أدرس اتجاه تغير الدالة f_α ثم شكل جدول تغيراتها.
- أرسم (C_α) التمثيل البياني للدالة f_α في الحالات التالية:

$\alpha = -2$ ، $\alpha = -1$ ، $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ ، $\alpha = -0,3$.

5. نفرض $\alpha > 0$ و نعتبر الدالة g_α المعرفة على $[0;+\infty[$ كما يلي:

$g_\alpha(0) = 0$ و من أجل كل x من $]0;+\infty[$ ، $g_\alpha(x) = f_\alpha(x)$

- عين نهاية الدالة g_α عند $+\infty$.
- بين أن الدالة g_α مستمرة عند 0.
- أدرس قابلية اشتقاق الدالة g_α عند 0. نميز الحالتين: $0 < \alpha < 1$ و $\alpha > 1$.
- أدرس اتجاه تغير الدالة g_α ثم شكل جدول تغيراتها.
- أدرس النهاية $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g_\alpha(x)}{x}$. يتم تمييز حالتين. أعط تفسيرا للنتائج.
- أرسم (Γ_α) التمثيل البياني للدالة g_α في الحالات التالية:

$\alpha = 0,3$ ، $\alpha = 0,5$ ، $\alpha = 1,5$ ، $\alpha = 2$.

elbassair.net

موضوع محلول

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=x^2e^{-2x}$

1. احسب f' مشتقة الدالة f .
   استنتج تغيرات الدالة f
2. أ- ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$.
   ب- ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ (استعمل النتيجة $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$)
3. أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$ الممثل للدالة f في المستوي المنسوب على معلم متعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$
   الوحدة: $5cm$ على محور الفواصل و $10cm$ على محور التراتيب.

حل مختصر

1. الدالة f هي جداء دالتين u و v قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=2xe^{-2x}+x^2(-2e^{-2x})$$

$$f'(x)=2xe^{-2x}(1-x)$$

$f'(x)=0$ من اجل $x=0$ أو $x=1$

من أجل كل عدد حقيقي x من $e^{-2x}>0$

إشارة $f'(x)$ هي من نفس إشارة $x(1-x)$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2. أ- $\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$ و $\lim\limits_{X\to+\infty}e^{X}=+\infty$ و منه $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-2x}=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ ، إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^{-2x}=+\infty$

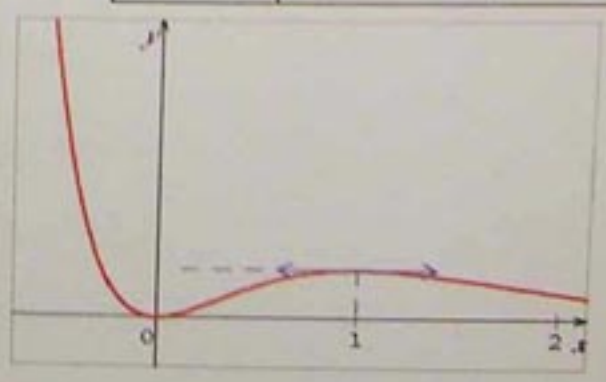
ب) لدينا $x^2e^{-2x}=(xe^{-x})^2$ و بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=0$ فينتج

$$\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-2x}=+\infty$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	e^{-2}	↘	0

3. التمثيل البياني:



تعاليق

- عند حساب لمشتقة احرص على أولا على ملاحظة شكل الدالة(جداء، مجموع،...)
- العدد موجب تماما من أجل كل عدد حقيقي x .
- يجب أن تعرف بطريقة آلية إشارة كثير حدود من الدرج الثانية.
- لرفع حالات عدم التعيين يمكن استعمال النهايتين: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$
- احرص بقدر الإمكان على رسم المنحني بدقة

elbassair.net

استعد للباكالوريا

موضوع مع إرشادات

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(ax+b)e^{-x+1}-1$

و $(\mathscr{C})$ المنحني الممثل لها في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. عين العدد الحقيقيين a و b حتى يقبل المنحني $(\mathscr{C})$ في النقطة $A(1;0)$ مماسا T موازيا للمستقيم $\mathscr{D}$ الذي معادلته $y=-3x$.

2. نقبل أن $f(x)=(-2x+3)e^{-x+1}-1$

أ- عين نهاية f عند $+\infty$ و أعط تفسيراً بيانيا للنتيجة.

- عين نهاية f عند $-\infty$.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f.

جـ- أنشئ المماس T و المنحني $(\mathscr{C})$.

3. على المجال $[0;6]$ ، الدالة f تترجم الفائدة الهامشية بالدينار (DA) لكمية x من الوحدات الإنتاجية المباعة (x بالآلاف)

عين بيانيا كمية الوحدات التي تكون من أجلها الفائدة قصوى.

إرشادات

الدالة المعطاة تتعلق بالعددين a و b اللذين وجب تعيينهما.

1. مستقيمين متوازيين لهما نفس معامل التوجيه و معامل توجيه المماس عند A التي فاصلتها 1 هو العدد المشتق للدالة عند 1.

2. أ- عندما لا تسمح المبرهنات على النهايات بالعمليات بحساب هذه الأخيرة نستعمل التزايد المقارن.

ب- استعمل $\left(e^{u}\right)'=u'e^{u}$ و ضع e^{u} كعامل مشترك لدراسة إشارة $f'(x)$.إذا كانت المشتقة على شكل جداء ، اعلم أن $e^{u}>0$.

ارسم المماسات و المقاربات قبل المنحني $(\mathscr{C})$.

3. الفائدة تكون عندما تكون دالة " الفائدة الهامشية " (مشتقة الفائدة) تنعدم مغيرة إشارتها، بيانيا تكون الفائدة قصوى عند فاصلة نقطة تقاطع $(\mathscr{C})$ مع محور الفواصل.

elbassair.net

تمارين

تمارين تطبيقية

1 ـ دالة اللوغاريتم للأساس a

1 في كل حالة من الحالات التالية عين مجموعة تعريف الدوال التالية:

1) $f(x)=\log_3(x+3)$ 2) $f(x)=\log_{0,5}(2x-1)$

3) $f(x)=x+\log_4(x)$

4) $f(x)=\log_5(x+1)-\log_{\sqrt{3}}(x-1)$

2 حل المعادلة و المتراجحة التاليتين:

1) $\log_{0,3}(x)=\log_{0,6}(3-2x)$

2) $\log_{0,3}(x)>\log_{0,6}(3-2x)$

3 حل المعادلة التالية:

$$\left[\log_3(x)\right]^2-7\log_3(x)+10=0$$

4 بكالوريا

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$5x^2-6(\ln 2)x+5(\ln 2)^2=0$$

استنتج حلول المعادلة $5(\log_2 x+\log_x 2)=6$

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة $\log_2 x>\log_x 2$

5 بكالوريا

1. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$\log_3(2x+5)+\log_3\left(\frac{1}{x}\right)=3$$

2. حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة : $\log_3\left(\frac{x}{x-1}\right)>1$

6 نعتبر كثير الحدود P للمتغير الحقيقي x المعرف كما يلي : $P(x)=2x^3-x^2-15x+18$

1. أحسب $P(2)$ ثم حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x)=0$

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة:

$$2(\log_3 x)^3-(\log_3 x)^2-15(\log_3 x)+18=0$$

7 حل في $\mathbb{R}^2$ الجملة : $\begin{cases}\log_3 x-\log_3 y=-\dfrac{1}{\ln 3}\\ x\times y=e\end{cases}$

8 حل المعادلة التالية:

$$\log_2(x^2+2x-3)-2\log_2(x-1)=\frac{2}{\ln 2}$$

9 احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\log_2(x-2)$ ؛ $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\log_{0,5}(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \log_5(1-2x)$ ؛ $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1+\log_{0,5}(4+x)$

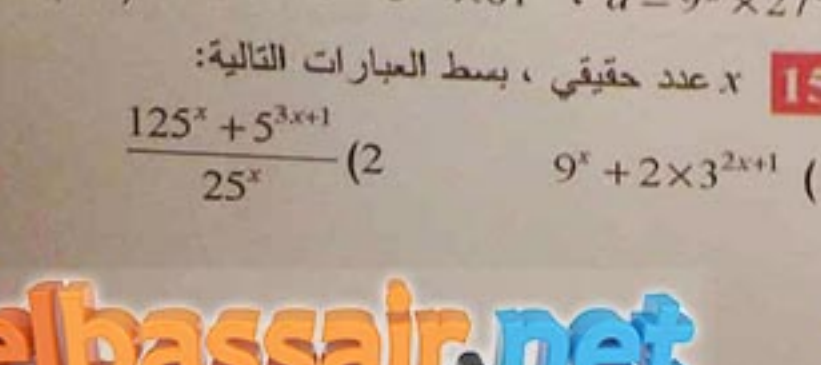
$\lim\limits_{x\to-\infty} -2x+\log_{0,5}(10-20x)$

10 نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x)=1+\log_{\sqrt{2}}(x)$$

عين اتجاه تغير الدالة f ثم أرسم المنحنى الممثل للدالة f انطلاقا من التمثيل البياني للدالة $x\mapsto\log_{\sqrt{2}}(x)$.

11 الشكل التالي هو التمثيل البياني للدالة $x\mapsto\log x$



انطلاقا من هذا المنحنى ارسم منحنيات الدوال التالية:

1) $f:x\mapsto 1+\log x$ 2) $g:x\mapsto\log x-2$

3) $h:x\mapsto-\log x$ 4) $k:x\mapsto 2\log x$

5) $m:x\mapsto\log|x|$ 6) $n:x\mapsto-2+\log(x+1)$

2 ـ قوى عدد حقيقي موجب تماما

باستعمال الحاسبة ، رتب الأعداد التالية:

$5^{3,6}$ ، $12^{\sqrt{3}}$ ، $20736^{0,25}$ ، $3^{-\sqrt{2}}$

12 رتب ترتيبا تصاعديا الأعداد التالية:

$28^{\frac{1}{3}}$ ، $15^{\frac{1}{4}}$ ، $13^{\frac{1}{2}}$ ، $80^{\frac{1}{9}}$ ، $100^{\frac{1}{12}}$

13 اكتب على أبسط شكل ممكن الأعداد التالية:

$a=5^{-\frac{1}{\ln 5}}$ ، $b=2^{\frac{1}{\ln 8}}$ ، $c=5^{\frac{1}{\ln 25}}$.

14 اكتب الأعداد التالية على شكل قوة للعدد 3

$a=9^{\frac{3}{2}}\times 27^{\frac{1}{4}}$ ، $b=3^{-\frac{5}{4}}\times 81^{\frac{5}{3}}$ ، $b=\left(3^{-4}\right)^{\frac{1}{3}}\times 27^{-\frac{1}{3}}$

15 x عدد حقيقي ، بسط العبارات التالية:

1) $9^x+2\times 3^{2x+1}$ 2) $\dfrac{125^x+5^{3x+1}}{25^x}$

elbassair.net

16 للبرهان على الخواص نستعمل $a^x = e^{x\ln a}$

مع تطبيق الخواص الجبرية للدالة $x \mapsto e^x$

مثلا للبرهان أن $a^x a^y = a^{x+y}$ لدينا:

$$a^x a^y = e^{x\ln a} e^{y\ln a} = e^{x\ln a + y\ln a} = e^{(x+y)\ln a} = a^{x+y}$$

17 حل المعادلات التالية:

1) $12^x = 3$ 2) $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{8}$

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 3$ 4) $5^{x-1} = 2^x$

5) $3^x = 4^{2x+1}$ 6) $5^{1-3x} = \frac{1}{125}$

18 حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلات التالية:

1) $\left(1+\frac{t}{100}\right)^5 = 1{,}65$ 2) $\left(1-\frac{t}{100}\right)^{10} = 0{,}5$

19 نعتبر المعادلة (E) التالية: $2^{x^2-6x} = 128$

1. بين أن المعادلة (E) تكافئ المعادلة $x^2 - 6x - 7 = 0$

2. استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

20 حل المعادلتين التاليتين:

1) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2-3x} = 49$ 2) $\left(\sqrt{5}\right)^{3-x^2} = 5^x$

21 نعتبر المعادلة (E) التالية: $4^x + 5.2^x + 6 = 0$

1) بين أنه بوضع $X = 2^x$ المعادلة (E) تؤول إلى المعادلة $X^2 + 3X - 4 = 0$ .... (E')

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E'). استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

22 حل المعادلتين التاليتين:

1) $-2.9^x 5.3^x = 2$ 2) $2.5^x - 5^{1-x} = 9$

23 حل المتراجحات التالية:

1) $3^x > 5$ 2) $\left(\sqrt{3}\right)^x < e$ 3) $\pi^x > 2$

4) $5^{-x} < 5^{2x}$ 5) $\frac{2^x}{2^x+1} < \frac{1}{3}$ 6) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x \le 2$

24 نعتبر المتراجحة (E) التالية: $2^{x^2+4} \ge 2^{5x}$

1) . بين أن (E) تكافئ المتراجحة $x^2 - 5x + 4 \ge 0$

2) استنتج مجموعة حلول (E).

25 نعتبر المتراجحة $3^{2x} - 7.3^x + 6 \le 0$

1) بين أنه بوضع $X = 3^x$ المتراجحة (E) تؤول إلى $X^2 - 7X + 6 \le 0$ .... (E')

2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E'). استنتج مجموعة حلول (E).

• في التمارين من **26** إلى **28** حل المعادلة و المتراجحة المقترحتين

26 1) $4^x + 2^{x+1} - 3 = 0$ 2) $4^x + 2^{x+1} - 3 \le 0$

27 1) $2^{2x+1} - 10.2^x + 12 = 0$

2) $2^{2x+1} - 10.2^x + 12 > 0$

28 1) $3^{x+1} + 2.3^{-x} = 7$ 2) $3^{x+1} + 2.3^{-x} \ge 7$

2) $2^{2x+1} - 10.2^x + 12 > 0$

29 1) احسب المجموع $S_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$ بدلالة n .

2) من أجل أي قيم للعدد n يكون $S_n \ge 10^{10}$ ؟

30 عند رمي قطعتي نقد متزنتين n مرة (n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 1)، احتمال عدم الحصول على الثنائية $(6;6)$ هو $p_n = \left(\frac{35}{36}\right)^n$

من أجل قيم للعدد n يكون $p_n \le 0{,}01$ ؟

31 بسط الأعداد التالية دون استعمال الحاسبة:

$a = \sqrt[2]{521}$ $\quad b = \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{125}$

$c = \sqrt{\sqrt[3]{4096}}$ $\quad d = \sqrt[5]{3} \times \sqrt[3]{9} \times \sqrt[15]{3^{12}}$

32 احسب الأعداد التالية:

$a = \dfrac{\sqrt{4} \times \sqrt[2]{8} \times \left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt{2}}}$ ، $b = \dfrac{\sqrt{4} \times \sqrt{8} \times \left(\sqrt[3]{\sqrt{4}}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$

• في التمارين من **33** إلى **35** بسط كتابة الأعداد التالية:

33 $A = \sqrt[3]{2^5} \times \sqrt[7]{2^3}$ $\quad B = \sqrt[3]{2^5} \times (\sqrt[4]{2^7})^2$

34 $A = \dfrac{\sqrt[3]{8^2} \times \sqrt[4]{32}}{8\sqrt[8]{4}}$ $\quad B = \sqrt[10]{1024} - 2^{-2}\sqrt[6]{2}$

35 $A = \dfrac{\sqrt{9} \times \sqrt{27}\sqrt[3]{9^2}}{(\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}}$ $\quad B = 5^{\frac{2}{3}}\sqrt[6]{25}$

36 اكتب الأعداد التالية على شكل أس ناطق

1) $(x-3)^2\sqrt{x-3}$ ؛ $x \ge 3$

elbassair.net

تمارين

2) $\sqrt[8]{(x+2)^3}$ ؛ $x \geq -2$

3) $\frac{1}{\sqrt[5]{x+1}}$ ؛ $x \geq -1$

4) $\frac{\sqrt[3]{2x-4}}{\sqrt[7]{2x-4}}$ ؛ $x > 2$

37 باستعمال المساواة $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

بين أن: $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}=3^{\frac{2}{3}}+6^{\frac{1}{3}}+2^{\frac{2}{3}}$

38 1) انشر $(2+\sqrt{2})^3$ و $(2-\sqrt{2})^3$

2) استنتج تبسيطا للعبارة $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}-\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

39 x عدد حقيقي موجب ، اكتب كل من الأعداد التالية على الشكل $x^{\frac{p}{q}}$:

$A=\sqrt{\sqrt{x}\times\sqrt[3]{x}}$ ؛ $B=\frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[10]{x^3}}$ ؛ $C=x^{-2}\left(\sqrt{x}\right)x^{\frac{1}{3}}$

40 حل المعادلات و المتراجحات التالية:

1) $\sqrt[3]{5-3x}=2$ ؛ $\sqrt[3]{5-3x}>2$

2) $x^{\frac{1}{3}}=x$ ؛ $x^{\frac{2}{3}}<x$

3) $\sqrt[5]{x+1}=\frac{1}{2}$ ؛ $\sqrt[5]{x+1}\geq\frac{1}{2}$

41 حل الجملتين التاليتين:

$\begin{cases} x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{3}{4}}=8 \\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{3}{2}}=40 \end{cases}$ و $\begin{cases} 2^x-3^y=5 \\ 3.2^x+3^y=24 \end{cases}$

42 نعتبر المعادلة (E) التالية: $x^{\frac{2}{5}}+x^{\frac{1}{5}}-6=0$

1) بين أنه بوضع $X=x^{\frac{1}{5}}$ المعادلة (E) تؤول إلى المعادلة $X^2+X-6=0$ .... (E')

2)حل في $\mathbb{R}$ المعادلة (E') .استنتج مجموعة حلول المعادلة (E).

43 نسبة السكان في بلد انخفضت إلى النصف في 20 سنة .ما هو معدل الانخفاض السنوي؟(مدورا إلى 0,1).

44 يريد أحمد أن يودع في بنك مبلغا قدره $5000DA$ خلال 6 سنوات و 7 أشهر .ما هو رأسمال أحمد اليوم إذا كانت الفائدة المركبة في معدل ثلاثة أشهر هي 2,6% .

45 قمنا بنمذجة سعر البيع لآلة ، مقدرا بمئات الدنانير، بدلالة عدد سنوات الاستعمال (x) بالعلاقة:

$$y=0,820^x\times 29,934$$

1. ما هو سعر الآلة و هي جديدة.

2.ما هو سعر بيع الآلة بعد 6 سنوات من استعمالها؟

3.بعد كم من سنة تفقد الآلة نصف قيمتها؟

3 - دراسة الدوال $x\mapsto a^x$ و $x\mapsto\sqrt[n]{x}$

46 عين مشتقات الدوال التالية المعرفة على $\mathbb{R}$

1) $x\mapsto 3^x$ 2) $x\mapsto\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 3) $x\mapsto\left(\frac{4}{5}\right)^x$

47 ادرس النهاية عند $-\infty$ وعند $+\infty$ للدالتين التاليتين:

1) $f(x)=(0,25)^x$ 2) $f(x)=\left(\frac{2\pi}{3}\right)^x$

48 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=3^{\frac{1}{x}}$

1.ادرس نهايات الدالة f عند حدود مجموعة تعريفها.

2.أ- عين الدالة المشتقة للدالة f .

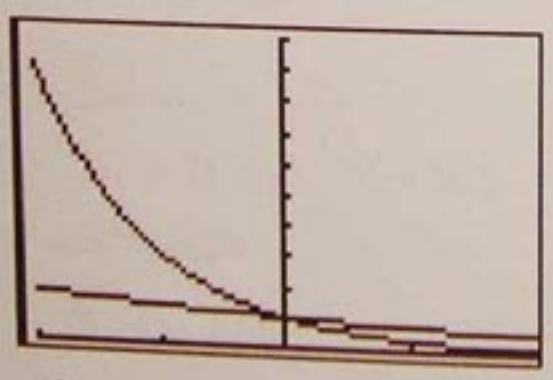
ب- استنتج تغيرات الدالة f .

49 f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x)=(0,78)^x$ و $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

$\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ هما التمثيلان البيانيان للدالتين f و g على الترتيب على شاشة حاسبة بيانية حيث:

$-2\leq x\leq 2$ و $0\leq y\leq 10$



1. ضع تخمينا حول وضعية المنحنيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$

2.برهن هذا التخمين.

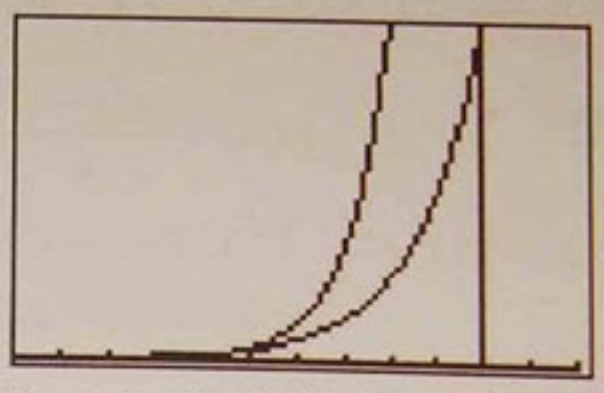
50 f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ بـ:

$f(x)=3^{x+2}$ و $g(x)=2^x$

elbassair.net

$\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$ هما التمثيلان البيانيان للدالتين f و g على الترتيب على شاشة حاسبة بيانية حيث:

$-10 \le x \le 2$ و $0 \le y \le 1$



1. ضع تخمينا حول عدد نقط تقاطع المنحنيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$.

2.ادرس تغيرا ت كل من f و g على $\mathbb{R}$.

شكل جدولي تغيرات كل من f و g.

3.حل المعادلة $f(x)=g(x)$.أعط القيمة المضبوطة للحلول ثم القيمة المقربة مدورة إلى 0,001 .

4.اقترح نافذة بيانية أحسن من النافذة المعطاة لمشاهدة وضعية المنحنيين $\mathcal{C}_f$ و $\mathcal{C}_g$.

51 من 1990 إلى 2000 ، تابعنا تطور السكان في مجتمعين F و G .هذا التطور معطى على الترتيب بـــ :

$f(t)=24\times1,2^t$ و $g(t)=4\times1,5^t$

حيث $f(t)$ و $g(t)$ مقدرة بآلاف الأشخاص و $t=0$ في نهاية عام 1990.

1.في نفس الشكل ، ارسم المنحنيين الممثلين للدالتين f و g اختر معلما مناسبا.

2.أ- بقراءة بيانية ، عين ابتداء من أية لحظة t المجتمع G يفوق المجتمع F ؟

ب- بين أن المعادلة $f(t)=g(t)$ تقبل $t=\dfrac{\ln 6}{\ln 1,25}$ كحل لها.

استعمل المعادلة المكافئة $\ln[f(t)]=\ln[g(t)]$.

52 مكتب دراسات في شركة أسّس علاقة تعطي المساحة y (بـــ m^2) لمحلات هذه الشركة بدلالة العدد x للزبائن (مقدر بالألف يوميا) ، هذه العلاقة هي:

$\ln y = 0,06x + 6,55$

1.أ- عين y بدلالة x على الشكل $y=k\,a^x$ حيث a قيمة مدورة إلى 0,1 و k عدد حقيقي مدور إلى 0,01.

ب- احسب مساحة محل يرتاده 6 آلاف شخص.

2.عين ابتداء من أي عدد للأشخاص المساحة تفوق $2500m^2$.تعطى النتيجة مدورة إلى 0,1 .

53 من 1980 إلى 1990 ، عدد الطلاب في جامعة ارتفع من 800000 إلى 972000، و وصل عدد الطلاب في 1997 إلى 1050000 طالب ليبلغ 1230000 عام 2000 .

1.أحسب معامل التناسب الإجمالي من 1980 إلى 1990. استنتج معدل تزايد الطلاب خلال هذه الفترة (10سنوات)

2. احسب معدل التزايد السنوي للطلاب من 1997 إلى 2000 .

إذا بقي هذا التزايد على ما هو عليه ، احسب عدد الطلاب عام 2007 .

54 f و g دالتان معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x)=(0,7)^x$ و $g(x)=(1,2)^x$

1.شكل جدول تغيرات الدالتين f و g .

2.ارسم المنحنيين الممثلين للدالتين f و g في معلم متعامد و متجانس.

55 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x^2+x}$

1.بين أن f هي مركب دالة كثير حدود و دالة أسية ذات أساس a .

2.ادرس ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

56 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{3^{2x}}{2^x}$

ادرس نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

57 نعتبر المعادلة (E) التالية: $2^x+3^x=5^x$

$\left(\dfrac{2}{5}\right)^x+\left(\dfrac{3}{5}\right)^x=1$ تكافئ المعادلة (E) . بين أن المعادلة

2.ادرس تغيرات الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$f(x)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^x+\left(\dfrac{3}{5}\right)^x$

elbassair.net

تمارين

4 - التزايد المقارن

58 1.أ- بين أن: $\frac{e^x}{x^n} = e^{x-n\ln x}$

ب- احسب نهاية $x - n\ln x$ لما x يؤول إلى $+\infty$.

جـ- استنتج نهاية $\frac{e^x}{x^n}$ لما x يؤول إلى $+\infty$

2.أ- بوضع $U = x^n$ ، بين أن: $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{n} \times \frac{\ln U}{U}$

ب- استنتج نهاية $\frac{\ln x}{x^n}$ لما x يؤول إلى $+\infty$.

3.أ- بوضع $U = \frac{1}{x}$ ، بين أن $x^n \ln x = -\frac{\ln U}{U^n}$

ب- استنتج نهاية $x^n \ln x$ لما x يؤول إلى 0.

4. أ- بوضع $U = -x$ ، بين أن $x^n e^x = -\frac{U^n}{e^U}$

ب- استنتج نهاية $x^n e^x$ لما x يؤول إلى $-\infty$

59 ادرس النهاية عند $+\infty$ للدالتين التاليتين:

1) $f(x) = x^2 + 1 - e^x$ 2) $f(x) = \frac{e^x - x}{x^2}$

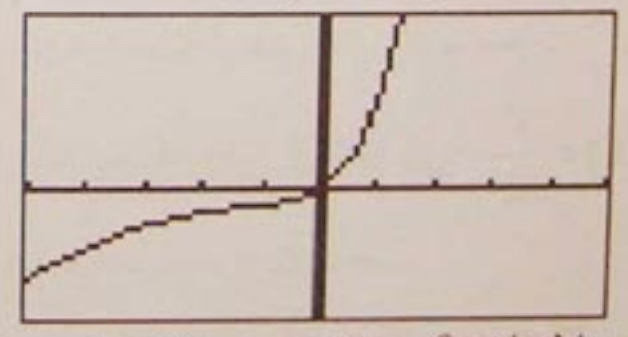
60 باستعمال تبديل المتغير ، ادرس النهاية عند $+\infty$ للدالتين التاليتين

1) $f(x) = \frac{e^{3x+1}}{x}$ 2) $f(x) = \frac{e^{x^2+x}}{x^2}$

61 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 10xe^x - x^2$

مثلنا منحنييها البياني على شاشة حاسبة باستعمال النافذة:

$-5 \le x \le 5$ و $-50 \le y \le 50$



1.ضع تخمينا لنهايتي f عند $-\infty$ و عند $+\infty$.

2.ضع x^2 كعامل مشترك في كتابة و ادرس نهاية f عند $+\infty$.

3. ادرس نهاية f عند $-\infty$.قارن بين التخمين الذي وضعته مع النتائج التي حصلت عليها.

• في التمارين من **62** إلى **64** عين النهاية عند $+\infty$ للدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$:

62 1) $f(x) = x^2 + x - \ln x$ 2) $f(x) = \frac{\ln x - 2x}{4x^2}$

63 1) $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$ 2) $f(x) = \frac{\ln(x^2+x)}{x}$

64 1) $f(x) = e^x - x^3$ 2) $f(x) = x^3 - \ln x$

65 احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{(\ln x)^3}$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\ln x}$ 4) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\ln x}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

66 احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{3x^2+2}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e\ln x}{x^2+x}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\ln(1-x)}{e^{-2x}}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} (1+2x)e^{3x}$

67 احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-3x+1}{1+e^x}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{1-x}$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x^2-x+1)e^{2x+1}$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} (2x^2-3)e^{3x-1}$

68 احسب النهايات التالية:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}+5}{1+x^2}$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (3\ln x - x)$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} - 2x^2$ 4) $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-x) - x$

69 الكلفة لمتوسطة لإنتاج وحدة معطاة بـ :

$$C_M(x) = \frac{x}{2} + 4\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

حيث x يمثل كمية الوحدات ؛ $C_M(x)$ مقدرة بآلاف الدنانير .

ما ذا تصبح الكلفة المتوسطة للإنتاج عندما ترتفع الكمية بشكل غير معروف؟

70 1. f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (2x-1)e^x$

عين نهاية f عند $-\infty$

2. g دالة معرفة على $\mathbb{R}^+$ بـ: $g(x) = \sqrt{x}e^{-2x}$

عين نهاية g عند $+\infty$.

elbassair.net

71 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=x^2e^{-x}$

1.ادرس نهايات f عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

2.ادرس تغيرات f و شكل جدول تغيراتها.

3.ارسم المنحني الممثل للدالة f في معلم متعام ومتجانس.

72 f دالة معرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $f(x)=\dfrac{3^x}{x^2}$

1. أ) ادرس نهاية الدالة f عند $-\infty$.

ب) ادرس نهاية الدالة f عند0.

2. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 0$:

$$f(x)=\frac{e^{x\ln 3}}{[x\ln 3]^2}\times[\ln 3]^2$$

استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

تمارين للتعمق

73 نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=xe^{-x}$$

نرمز بـ (Γ) إلى التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة: $10cm$

الجزء1:

1.أ- عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

ب- ادرس تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

جـ- أنشئ (Γ).

2. أ- بين انه من أجل كل عدد حقيقي m من $\left]0;\dfrac{1}{e}\right[$ ، المعادلة $f(x)=m$ تقبل حلين.

ب- في الحالة $m=\dfrac{1}{4}$ ، نرمز إلى الحلين بـ α و β حيث $\alpha<\beta$.عين حصرا سعته 10^{-2} للعدد α .

جـ- حل المعادلة $f(x)=m$ في الحالة $m=0$ و $m=\dfrac{1}{e}$.

الجزء2: نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$u_\alpha=\alpha$ و $u_{n+1}=u_ne^{-u_n}$ حيث α هو العدد المعرف في الجزء1 . 2 .ب.

1.أ-برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n، $u_n>0$

ب- برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

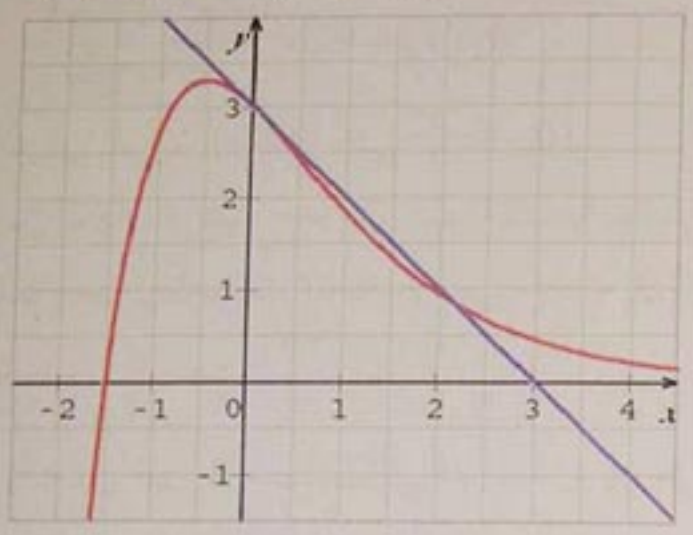
جـ- هل المتتالية (u_n)متقاربة؟ إذا كان الجواب نعم عين نهايتها.

74 بكالوريا

المنحني $(\mathcal{C})$في الشكل التالي هو التمثيل البياني لدالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=e^{-x}(ax+b)$

حيث a و b عددان حقيقيان .المستقيم Δ هو المماس للمنحني $(\mathcal{C})$ عند النقطة التي فاصلتها 0 .

هذا المماس يمر بالنقطة $A\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{7}{2}\right)$ و $B\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{2}\right)$



الجزء 1 :

1. بقراءة بيانية عين $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$ ، $f(0)$ و $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

2.احسب $f'(0)$

3.عين معادلة للمستقيم Δ .

4.عين قيمتي a و b .

الجزء 2 :

1.لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$h(x)=-e^{-x}(2x+1)+1$$

شكل جدول تغيرا ت الدالة h (لا يطلب حساب النهايات).

استنتج انه من أجل كل $x\in[0;1]$: $h(x)\leq 0$

2. لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$g(x)=e^{-x}(2x+3)+x-3$$

احسب $g'(x)$ عبر عن $g'(x)$ بدلالة $h(x)$.

3. استنتج اتجاه تغير الدالة g ثم إشارة $g(x)$ على $[0;1]$.

الجزء3:

1. استنتج من الأسئلة السابقة أن المنحني $(\mathcal{C})$ تحت المستقيم Δ في المجال $[0;1]$.

2. استنتج أن $\int_0^1 f(x)dx\leq\dfrac{5}{2}$

elbassair.net

تمارين

75 لتكن f المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ بـ :

$$f(x)=\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}$$

و $(\mathscr{C})$ هو تمثيلها البياني في معلم متعامد، الوحدة $2cm$ على محور الفواصل و $12cm$ على محور التراتيب.

1.أ- احسب $f(-x)$.ماذا تستنتج بالنسبة للدالة f .

ب- تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=-2x\frac{\ln(x^2+1)-1}{(x^2+1)^2}$$

جـ- ادرس إشارة $f'(x)$ على $[0;+\infty[$.

د- ادرس نهاية f عند $+\infty$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

هـ- شكل جدول تغيرات الدالة f على $[0;+\infty[$ و أعط القيمة المضبوطة للعدد $f\left(\sqrt{e-1}\right)$

و- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x : $0\le f(x)\le\frac{1}{e}$.

2. أ- ارسم المنحني $(\mathscr{C})$ محدّدا المماسين لـ $(\mathscr{C})$ عند النقطتين اللتين فاصلتاهما 0 و $\sqrt{e-1}$.

ب- بقراءة بيانية ، عين عدد حلول المعادلة $f(x)=0,2$ نرمز بـ α و β إلى الحلين الموجبين للمعادلة و نقبل أن $\alpha\approx0,54$ و $\beta\approx3,42$.

جـ- شكل جدول إشارة $[f(x)-0,2]$ على المجال $[0;+\infty[$.

76 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=e^{2x}-3e^x+x+2$$

(C) هو التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة $4cm$

1) أ) عين نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $-\infty$.

ب) بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=x+2$ مقارب للمنحني (C) .

ج) ادرس وضعية المنحني (C) بالنسبة إلى المستقيم D .

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f(x)=e^x\left(e^x-3+\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)$$

استنتج نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $+\infty$.

3) أ- احسب $f'(x)$

ب- تحقق من أن: $f'(x)=(2e^x-1)(e^x-1)$

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f'(x)=0$ ثم شكل جدول تغيرات f

4) أ- عين معادلة المماس T للمنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

ماذا يمكن القول عن المستقيمين T و D ؟

ب- ارسم T ، D و المنحني (C) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

5) احسب بـ cm^2 المساحة S لحيز المستوي المحدد بالمنحني (C) ، المستقيم D و المستقيمين اللذين معادلتاهما: $x=0$ و $x=\ln 3$.

77 لتكن f المعرفة على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]$ بـ :

$$f(x)=x+\sqrt[3]{1-3x}$$

و $(\mathscr{C})$ هو تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس، الوحدة $3cm$.

1. ادرس نهاية f عند $-\infty$.

2.أ- احسب $f'(x)$ و $f''(x)$ حيث f' و f'' هما المشتقة الأولى و الثانية على الترتيب للدالة f

ب- تحقق أنه من أجل كل $x\in\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]$:

$f''(x)<0$

جـ- بملاحظة أن $f'(0)=0$ ، استنتج إشارة $f'(x)$ على المجال $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]$

د- شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. ارسم المنحني $(\mathscr{C})$.

4.أ-عين دالة أصلية للدالة $h:x\mapsto\sqrt[3]{1-3x}$ على $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]$

ب- احسب بـ cm^2 مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحني $(\mathscr{C})$ و المستقيمات التي معادلاتها:

$x=0$ ، $y=x$ و $x=\frac{1}{3}$.

78 لتكن f المعرفة على المجال $\mathbb{R}^*$ بـ :

$$f(x)=\frac{5^x}{5^{2x}-1}$$

و $(\mathscr{C})$ هو تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس، الوحدة $5cm$.

1. بين أن الدالة f فردية.

2. أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x :

elbassair.net

$$f'(x) = -\frac{5^x \ln 5 \times \left(5^{2x}+1\right)}{\left(5^{2x}-1\right)^2}$$

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f .

3. أ- احسب نهاية f عند 0. أعط تفسيرا بيانيا لهذه النتيجة.

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

4. حل المعادلتين $f(x)=\frac{2}{3}$

5. ارسم المنحنى $(\mathscr{C})$.

79 لتكن الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـــ:

$$f(x)=x^2-3+3e^{-\frac{1}{3}x}$$

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة $2cm$)

1) أ- احسب f' مشتقة الدالة f .

ب- ادرس تغيرات الدالة f' و احسب نهاية f' عندما يؤول x إلى $+\infty$.

جـــ- استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α $(\alpha>0)$ حيث $f(\alpha)=0$ و بين أن $0,4<\alpha<0,5$

د- ادرس إشارة $f'(x)$ على $[0;+\infty[$

2) أ- احسب نهاية f عندما يؤول x إلى $+\infty$

ب- ادرس إشارة $f(x)-(x^2-3)$.فسر النتيجة هندسيا (نرمز بـــ P إلى المنحني الذي معادلته $y=x^2-3$)

3) أ- شكل جدول تغيرات الدالة f .

ب- بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا β في المجال $]\alpha;+\infty[$ ثم تحقق أن $0,8<\beta<0,9$

4) ارسم المنحنيين P و (C_f) و حدد المماس للمنحني (C_f) عند النقطة التي فاصلتها 0 .

80 لتكن الدالة f المعرفة على $[0;+\infty[$ بـــ:

$$f(x)=x+1+xe^{-x}$$

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (الوحدة $2cm$)

1) أ- f' و f'' هما على الترتيب الدالة المشتقة الأولى و الدالة المشتقة الثانية للدالة f .

احسب من أجل كل عدد حقيقي موجب x، $f'(x)$ و $f''(x)$.

ب- ادرس تغيرات الدالة f' .بين أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب x ، $f'(x)>0$

جـــ- احسب نهاية الدالة f عند $+\infty$

د- شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) أ- بين أن المستقيم D الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للمنحني (C_f) و حدد الوضعية النسبية للمستقيم D و المنحني (C_f) .

ب- بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا في نقطة A موازيا للمستقيم D .عين إحداثيتي A .

3) بين أن المعادلة $f(x)=2$ تقبل حلا واحد α على المجال $]0;+\infty[$.تحقق أن $0<\alpha<1$

4) ارسم المستقيم D ، المماس عند النقطة A والمنحني (C_f) .

مسائل

81 بكالوريا

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$

الوحدة: $10cm$

الجزء 1 :

I . نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x)=(2,5+x)e^{-0,5x+1}$$

1.ادرس اتجاه تغير الدالة f .

2.احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

3.تحقق انه من اجل كل عدد حقيقي x ،

$$f(x)=\frac{2,5}{e^{-0,5x+1}}+2e\times\frac{0,5x}{e^{-0,5x}}$$

استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

4. شكل جدول تغيرات الدالة f .ارسم التمثيل البياني للدالة f في المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

II . لتكن g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـــ :

$$g(x)=0,3x+1$$

1.أنشئ في نفس المعلم التمثيل البياني للدالة g .

2.نريد حل المعادلة $f(x)=g(x)$ على المجال $[0;10]$

نضع من اجل كل x من $[0;10]$:

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

أ-باستعمال نتائج السؤال 1، بين أنه من أجل كل x من

elbassair.net

$h(x)<0$: $[0;10]$

ب- استنتج أن المعادلة $h(x)=0$ تقبل في المجال $[0;10]$ حلا واحدا نرمز له بـ α.

جـ- بقراءة بيانية ، احصر بعددين طبيعيين متتابعين.

د- أعط حصراً للعدد α سعته 0,01 .

الجزء 2:

I . نعتبر منتوجا حيث دالة " الطلب " هي $f(p)$ بدلالة السعر الموحد p و دالة " العرض " هي $g(p)$ (p مقدر بالدينار و $p\in[0;10]$).

1. أعط سعر الموازنة أي السعر الذي يكون فيه الطلب مساويا للعرض.

2.تحقق أنه من أجل سعر $3,10\,DA$ ، إذا ارتفع السعر بنسبة 1% ، الطلب ينخفض بنسبة 1% تقريبا.

II . نعتبر الدالة E المعرفة على المجال $[0;10]$ بـ :

$$E(x)=x\frac{f'(x)}{f(x)}$$

في الاقتصاد E تمثل المرونة لـ f .

1.تحقق أن من أجل كل x من $[0;10]$:

$$E(x)=\frac{-0,5x^2-0,25x}{x+2,5}$$

2- حل في $[0;10]$ المعادلة $E(x)=-1$.

ب-أعط قيمة عشرية مقربة على 0,01 بالنقصان لهذا الحل.

82 الجزء 1 :

لتكن الدالة f المعرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ:

$$f(x)=-x+7+6\ln(2x+1)-6\ln(2x+2)$$

نرمز بـ (C) إلى التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1) برر أن f معرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

2) عين نهاية الدالة f عند $-\frac{1}{2}$.استنتج أن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (D) يطلب تعيين معادلة له.

3) بملاحظة أنه من أجل كل x من $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$6\ln(2x+1)-6\ln(2x+2)=6\ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)$ ،

عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

4) ليكن (Δ) المستقيم الذي معادلته $y=-x+7$

أ- ما هي نهاية $\left[f(x)-(-x+7)\right]$ عندما يؤول x إلى $+\infty$ ؟ أعط تفسيرا هندسيا.

ب- ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ).

5) أ) بين أنه من أجل كل x من $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$:

$$f'(x)=\frac{-2x^2-3x+5}{(2x+1)(x+1)}$$

حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

ب- ادرس إشارة f' و شكل جدول تغيرات f .

6) ليكن T المماس للمنحنى (C) عند النقطة M التي فاصلتها0 .عين معادلة للمستقيم T .

7) ارسم المستقيمات (D)، (Δ)، T و المنحنى (C) في المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$ الوحدة $2cm$

الجزء 2:

1) لتكن H الدالة المعرفة على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ بـ:

$$H(x)=(2x+1)\ln(2x+1)-(2x+2)\ln(2x+2)$$

بين أن الدالة H هي دالة أصلية على $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$ للدالة h المعرفة على هذا المجال بـ: $h(x)=2\ln\left(\frac{2x+1}{2x+2}\right)$

2) نرمز بـ (E) إلى حيز المستوي المحدد بالمنحنين (C) المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=2$ و $x=5$

أ- ضلل الحيز (E) في الشكل.

ب-احسب القيمة المضبوطة لمساحة (E) مقدرة بوحدة المساحات.

جـ- احسب مساحة (E) بـ cm^2 (تعطى النتيجة على شكل قيمة مقربة إلى 0,01)

83 بكالوريا

1. لتكن C_m الدالة المعرفة على $[0;6]$ بـ :

$$C_m(q)=0,8+4(1-2q)e^{-2q}$$

هذه الدالة تمثل الكلفة الهامشية اليومية لمصنع ينتج مادة كيميائية على شكل سائل، q هو كمية المنتوج مقدر بآلاف اللترات و $C_m(q)$ مقدر بآلاف الدنانير

elbassair.net

شكل جدول تغيرات الدالة C_m ، و عين قيمة $C_m(1)$ في الجدول.

- استنتج إشارة $C_m(q)$ على $[0;6]$.

2. أ- بين أن الدالة g المعرفة على $[0;6]$ بـــ :

$g(q)=4qe^{-2q}$ تقبل كدالة مشتقة الدالة المعرفة بـــ :

$g'(q)=4(1-2q)qe^{-2q}$

ب- علما أن المصاريف الثابتة $C_T(0)$ ترتفع بألف دينار ، عين الدالة C_T التي تمثل الكلفة الإجمالية بدلالة q .

3.أ- ادرس اتجاه تغير الدالة C_T على $[0;6]$ باستعمال السؤال 1 .

ب- مثل الدالة " الكلفة الإجمالية " في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس ،الوحدة $2cm$.

II . ثمن البيع لهذا السائل هو $10,8DA$ للتر الواحد ، و الإنتاج اليومي يباع كلّه.

1. أ- مثل في المعلم السابق الدالة التي تمثل الدخل اليومي.

ب- بين أن الفائدة (نرمز لها بـــ $B(q)$) معطاة بـــ :

$B(q)=q-1-4e^{-2q}$

2.لتكن الدالة h المعرفة على $[0;6]$ بـــ :

$h(q)=1,8-C_m(q)$

أ-ادرس اتجاه تغيرات الدالة h مستعملا تغيرات الدالة C_m .

ب- بين أن المعادلة $h(q)=0$ تقبل حلا واحدا α على $[0;1]$ (لا يطلب حساب α)

جـــ- استنتج إشارة $h(q)$ على $[0;6]$.

3. أ- أعط تغيرات الدالة B (استعمل السؤال السابق).

ب- أعط قيمة $B(\alpha)$ بتقريب 0,01 بأخذ 0,28 كقيمة لـــ α ماذا تمثل هذه القيمة بالنسبة للمصنع ؟

84 بكالوريا

الجزء 1 : لتكن f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ :

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{-1+\ln x}{x^2}$$

بعض المعلومات المتوفرة عن الدالة معطاة في جدول التغيرات التالي:

x	1		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	↗	$f(e^{\frac{3}{2}})$	↘	$\frac{1}{2}$

1.أ- بين أنه من اجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{3-2\ln x}{x^3}$$

حيث f' هي مشتقة الدالة f .

ب- ادرس إشارة $f'(x)$ حسب قيم x و جد من جديد تغيرات الدالة f (لا يطلب حساب النهايات).

2. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا واحدا α في المجال $[1;e]$.

3.باستعمال النتائج السابقة و جدول تغيرات f ، عين إشارة $f(x)$ حسب قيم x .

الجزء 2:

لتكن g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـــ :

$$g(x)=\frac{1}{2}x+1-\frac{\ln x}{x}$$

و $(\mathcal{C})$ هو تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس ، الوحدة $2cm$

1.أ- عين نهاية g عند $+\infty$.

ب- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right]$.ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى $(\mathcal{C})$ ؟

جـــ- ادرس وضعية المنحنى بالنسبة للمستقيم $\mathcal{D}$ الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x+1$

2.بين أن الدالة f المعرفة في الجزء A هي مشتقة الدالة g استنتج تغيرات الدالة g .

3. لتكن M النقطة من $(\mathcal{C})$ التي فاصلتها e و T المماس للمنحنى في M .بين أن T يوازي $\mathcal{D}$.

4.ارسم $\mathcal{D}$ ، T و $(\mathcal{C})$ (تؤخذ 1,25 كقيمة مقربة للعدد α).

5. ليكن S حيز المستوي المحدد بالمنحنى $(\mathcal{C})$ ،المستقيم $\mathcal{D}$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$.

و لتكن A مساحة الحيز S مقدرة بوحدة المساحات.

أ- عبر عن A بتكامل .

ب- احسب A (لاحظ أن $\frac{\ln x}{x}=\frac{1}{x}\times\ln x$).

elbassair.net

اختبر معلوماتك

اختيار من متعدد

85 لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=(1-x^2)e^{-x}$$

لكل سؤال إجابة واحدة فقط صحيحة. حدّد هذه الإجابة

1. مشتقة الدالة f هي :

أ- $f'(x)=(x^2+1)e^{-x}+\frac{2}{e^x}$

ب- $f'(x)=(x-1)^2e^{-x}-\frac{2}{e^x}$

جـ- $f'(x)=-(x^2+2x-1)^2e^{-x}$

د- $f'(x)=(x^2+2x-1)^2e^{-x}$

2. منحنى الدالة f يقطع محور الفواصل في:

أ- نقطة واحدة ب- نقطة واحدة الأكثر

جـ- نقطتين د- لا يقطع محور الفواصل.

3. دالة أصلية للدالة f هي :

أ. $F(x)=(x^2-2x+1)e^{-x}$

ب. $F(x)=(x^2+2x-1)e^{-x}$

جـ. $F(x)=(x+1)^2e^{-x}-1$

د. $F(x)=(x-1)^2e^{-x}+1$

86 لكل سؤال عدة اقتراحات يمكن أن تكون صحيحة، عينها مع تعليل الجواب

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x2^{-x}$ ،

و $\mathscr{C}$ تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس.

1. أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

2. من اجل كل عدد حقيقي x:

أ) $f'(x)=(1-x\ln 2)e^{-x\ln 2}$ ب) $f'(x)=(1-x)2^{-x}$

ج) $f'(x)=(1-x\ln 2)2^{-x}$

3. أ) من اجل كل عدد حقيقي x: $f(x)\le\frac{3}{4}$

ب) المعادلة $f(x)=\frac{1}{2}$ تقبلين حلين فقط.

ج) المماس T للمنحنى $\mathscr{C}$ عند النقطة التي فاصلتها0 فوق المنحنى $\mathscr{C}$.

4. g هي الدالة المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ $g(x)=\ln f(x)$

أ) من أجل كل عدد حقيقي $x>0$، $g(x)<0$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

ج) الدالة g متناقصة على المجال $\left]0;\frac{1}{\ln 2}\right[$.

صحيح أم خاطئ

87 اذكر إن كانت النهايات التالية صحيحة أو خاطئة مع تبرير جوابك

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=(-x+3)e^{-x}$

1. من أجل كل $x>0$، $f(x)\ge -x+3$.

2. محور الفواصل مقارب لمنحني الدالة f.

3. مشتقة الدالة f هي $f'(x)=(2-x)e^{-x}$

4. الدالة g تقبل قيمة حدية واحدة.

5. من أجل كل $m\neq e^2$ ، المعادلة $f(x)=m$ إما لا تقبل حلا أو تقبل حلين.

6. الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

88 f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=xe^{-x}$

اذكر إن الخواص التالية صحيحة أم خاطئة و علل اختيارك

1. من كل عدد حقيقي x : $f(x)f(-x)\le 0$

2. من كل عدد حقيقي x : $f'(x)+f(x)=e^{-x}$

3. من كل عدد حقيقي x : $f(x)\le 1$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$

6. المنصف الأول هو المماس لمنحني الدالة f عند النقطة التي فاصلتها0.

89 لكل خاصية من الخواص التالية ، اذكر إن كانت صحيحة أم خاطئة معللا إجابتك.

1. من اجل كل عدد حقيقي x، $\ln(2^x)=x$

2. يوجد عدد حقيقي a موجب حيث من اجل كل عدد حقيقي x، $\ln(a^x)=x$

3. من اجل كل عددين حقيقيين موجبين تماما a و x ،

$$a^{\frac{\ln x}{\ln a}}=x$$

4. يوجد عدد حقيقي x حيث $2^{x-1}=3$

5. من اجل كل عدد حقيقي موجب x، $\sqrt[100]{x}\le x$

6. يوجد عدد حقيقي موجب x حيث $\left(\sqrt[3]{x}\right)^3\neq x$

7. من أجل كل عددين حقيقيين x و y: $2^{x+y}=\sqrt{2^{2x}\times 2^{2y}}$

elbassair.net

9 الإحصاء 9

الكفاءات المستهدفة

- تعريف سلسلة إحصائية لمتغيرين عددين .
- تمثيل سلسلة إحصائية لمتغيرين عددين بسحابة نقط .
- تعين إحداثيي النقطة المتوسطة .
- إنشاء مستقيم تعديل خطي .
- إنجاز محاكاة لتبيان تلاؤم معطيات تجريبية مع قانون متساوي الإحتمال .

elbassair.net

سعيد الحزين

الطالب سعيد حزين جدا و هو ينظر بحسرة إلى الجدول أدناه :

لا شك أنك تتساءل لماذا ؟ إن جهوده المضنية في جمع البيانات حول دراسة إحصائية كلفه بها أستاذه تبخرت بسبب عبث أخيه الصغير بأوراقه فضاعت منه كثير من المعلومات فهو يذكر أن عدد الأشخاص الذين استجوبهم هو 400 . فهل بإمكانك مساعدة سعيد الحزين و جعله سعيدا ؟

الفئات	المراكز x_i	التكرار n_i	%	تكرار مجمّع صاعد	$n_i x_i$
[14 ; 16 [			5		
	17				1088
[; 22 [					
		84		280	
[24 ; [		40			
[26 ; 30 [	28				

الحل في آخر هذا الفصل

elbassair.net

النشاط الأول





تُدرس بعد كل خمس سنوات
ملفات المستفيدين من السكن في القرى
و المدن المتوسطة و الكبيرة .
أظهر ت الدراسة الجدول التالي

السنة	y_i عدد المستفيدين في المدن المتوسطة	z_i عدد المستفيدين في المدن الكبيرة	t_i عدد المستفيدين في القرى
1999	124.2	988.9	24.2
2000	131.1	979	24
2001	138.9	919.5	25.9
2003	141.6	946.1	21.3
2004	152.9	1041	–

يعطى عدد المستفيدين بالآلاف .

1) أدخل كلا من هذه السلاسل في قوائم الحاسبة و عين التمثيلات البيانية لسحابات النقط في الحالات الثلاثة .

شرح الكيفية بالحاسبة Ti83+

لإدخال قائمة الأعداد X_i و لتكن L_1 و قائمة الأعداد Y_i و لتكن L_2

1) STAT → 1:Edit...

2) STAT → 2nd → Y= → 1:Plot1...Off → ENTER → ON

ثم اختر القائمة L_1 ، القائمة L_2 و Marque

3) ZOOM → 9:ZoomStat → ENTER

4) TRACE

للمعاينة أنقر تباعا على الأزرار لتتبع نقط السحابة :

2) بعد معاينة السلاسل $(x_i;y_i)$ ، $(x_i;z_i)$ و $(x_i;t_i)$ على شاشة الحاسبة أيها تكون النقط فيها أقرب إلى الإستقامية؟

3) مثل النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O'(1998;120)$ و بوحدة 2 cm لكل سنة و 1 cm لكل 5 آلاف مستفيد .

3) أنشئ (D_1) المستقيم الذي يشمل $M_1(1999;124,2)$ و $M_5(2004;152,9)$. أكتب معادلة ديكارتية لـ (D_1)

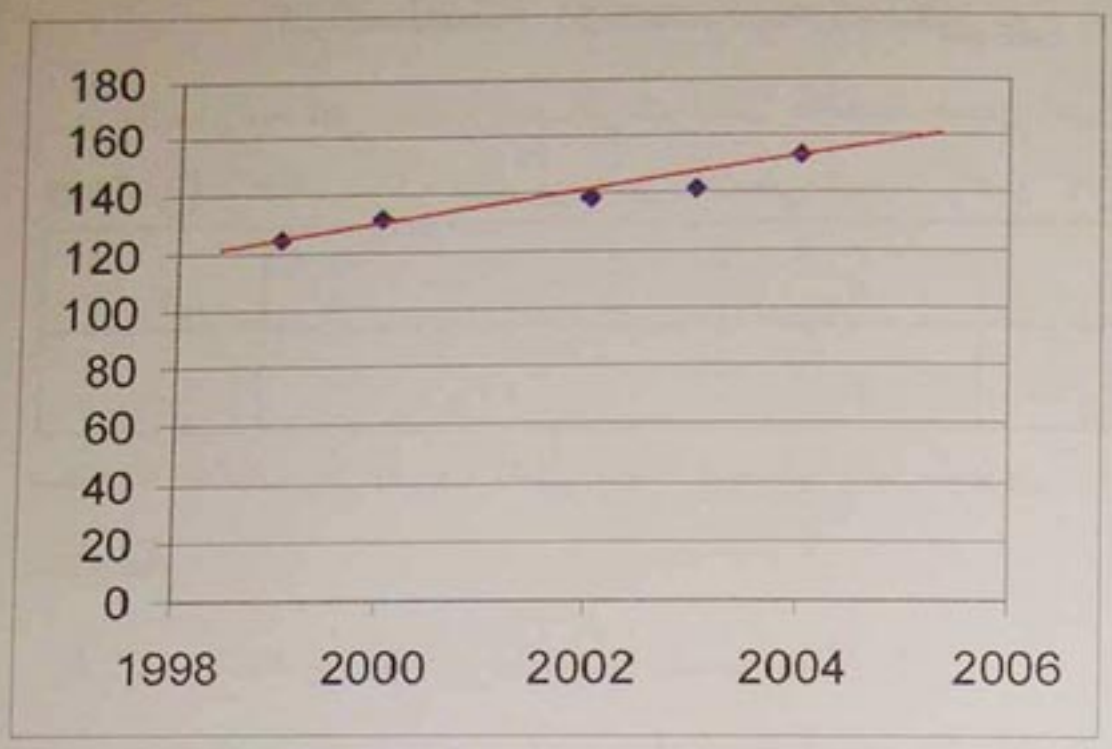
4) أنشئ في نفس المعلم المستقيم (D_2) ذا المعادلة $y = 5,12x - 10112$

– أي المستقيمين أقرب الى السحابة ؟

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

النشاط الثاني



نتناول النشاط السابق من جديد . إليك تمثيل سحابة النقط و المستقيم (D_1)، نريد إثبات أن المستقيم (D_2) الذي معادلة له

$$y = 5,12x - 10112$$

أقرب لسحابة النقط $M_i(x_i, y_i)$ من المستقيم (D_1) الذي معدلة له :

$$y = 5,74x - 11350$$

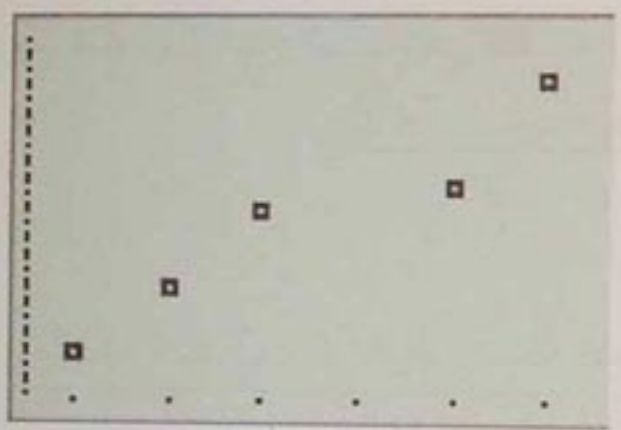
1) M_4 هي النقطة التي احداثياها (x_4, y_4)

و P_4 هي النقطة من (D_1) و التي قاصلتها x_4 فاصلة M_4

- فسر هندسيا العددين

$$d_4 = y - 5,74x_4 + 11350$$

و $d_4^2 = (y - 5,74x_4 + 11350)^2$



2) باستعمال الحاسبة ،

- أحسب الأعداد الخمسة $(y_i - 5,74x_4 + 11350)^2$ من أجل قيم i حيث $i \in \{1,2,3,4,5,\}$

ثم أحسب المعدل $\overline{x_1}$ لهذه المربعات

شرح الكيفية بالحاسبة Ti83+

1- لإدخال عبارة الدالة Y= و بالنسبة للمتغير نستعمل اللمسة X,T,θ,n

2- لتعيين بداية الجدول و الخطوة 2nd ثم WINDOW

3- للتنقل داخل الجدول 2nd ثم GRAPH و نستعمل الأزرار ، ، ، ،

3) أحسب المعدل $\overline{x_2}$ للمربعات $d_4'^2 = (y_i - 5,74x_4 + 11350)^2$

4) قارن بين المعدلين - التعليق

elbassair.net

السلسلة الإحصائية لمتغيرين :

أثناء دراسة على مجتمع إحصائي تتم أحيانا ملاحظة طبعين كميين (كملاحظة مادتي الرياضيات و الفيزياء في ثانوية ما) . عندئذ نعرّف متغيرين X و Y تعطى قيمهما x_i و y_i في لاجدول

X	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

مجموعة الثنائيات $(x_i;y_i)$ تشكل سلسلة إحصائية ذات متغيرين

ملاحظة :

1-1- سحابة نقط و النقطة المتوسطة :

في معلم متعامد (مناسب) مجموعة النقط $M_i(x_i,y_i)$ هي سحابة نقط السلسلة ذات المتغيرين X و Y

النقطة المتوسطة لهذه السلسلة هي النقطة $G(\overline{x},\overline{y})$ حيث $\overline{x}$ معدل القيم x_i و $\overline{y}$ معدل القيم y_i

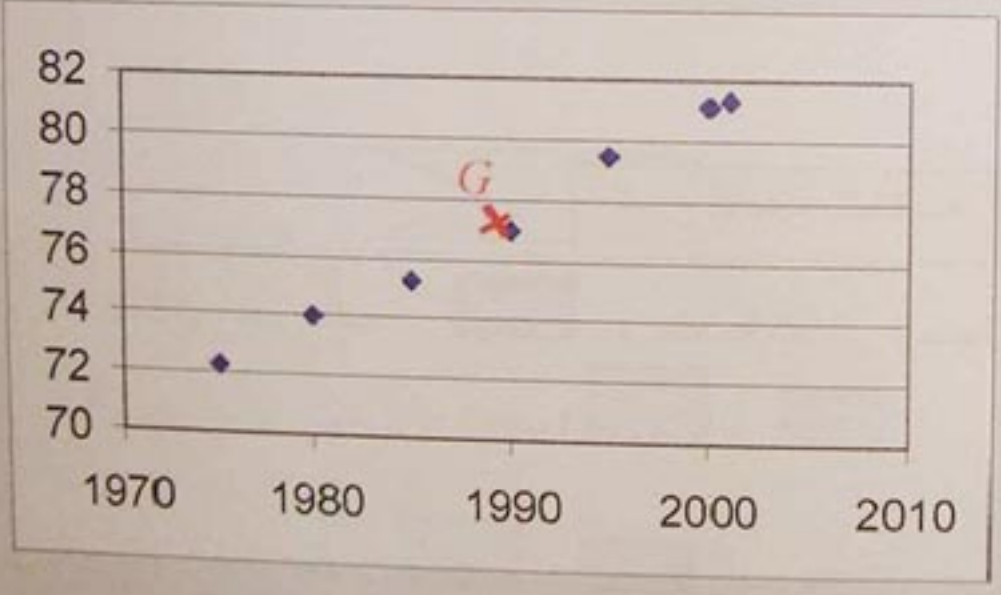
$$\overline{x}=\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \qquad \overline{y}=\frac{y_1+y_2+...+y_n}{n}$$

ملاحظة :

مثال : يوضح الجدول التالي ارتفاع نسبة النجاح في شعبة تسيير و اقتصاد خلال سبعة سنوات في مؤسسة ما

السنة x_i	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2001
النسبة y_i	72,3	74	75,3	77	79,5	81,1	81,3

سحابة النقط الممثلة لهذه السلسلة في



معلم متعامد مبدؤه $O'(1975;70)$

النقطة المتوسطة $G(1989;77,2)$

2-1- تغيير المبدأ أو الوحدة :

*** تغيير المبدأ :** $z_i=x_i-a$ و $t_i=y_i-b$

بخواص الخطية للمعدل: $\overline{z}=\overline{x}-a$ و $\overline{t}=\overline{y}-b$. في المثال السابق $G'(14,4;7,2)$ مع أخذ $a=1975$ و $b=70$

*** تغيير الوحدة :** $u_i=ky_i$

elbassair.net

موقع عيون البصائر التعليمي

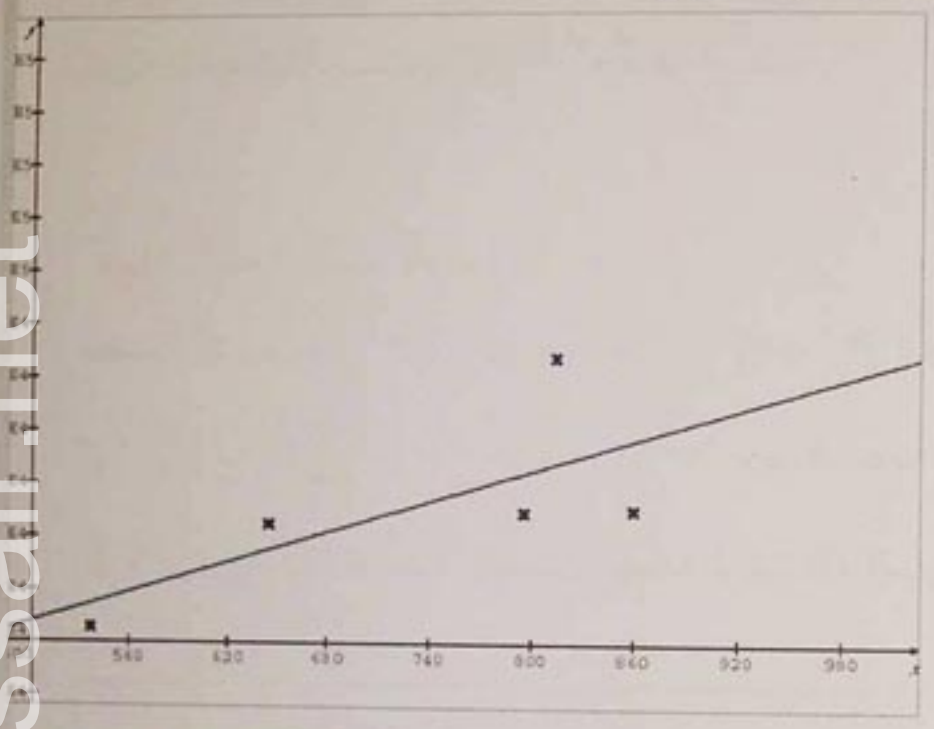
نطبق الخواص : $\overline{u} = k\overline{y}$. في المثال السابق $G'(14,4;0,772)$ مع أخذ $z_i = x_i - 1975$ و $u_i = \frac{y_i}{100}$

تمرين محلول1: يبين الجدول التالي العدد x_i لخريجي الجامعات و المعاهد العليا في خمس بلدان بدلالة عدد سكانها y_i . (x_i و y_i بالآلاف)

البلد	1	2	3	4	5
x_i	815	860	536	796	645
y_i	92539	69901	52198	69516	67804

- مثل سحابة النقط $(x_i;y_i)$ في معلم متعامد و مناسب

الحل لاختيار المعلم ، نستعمل قيم مدورة للقيم الدنيا و القصوى لكل من المتغيرين X و Y



شرح الكيفية بالحاسبة Ti83+

بعد إدخال القيم x_i و y_i في القائمتين L_1 و L_2

على الترتيب نستعمل اللمسات

ZOOM ZoomStat ENTER

نختار كمبدأ $O'(500;50000)$ كوحدة على محور الفواصل

2cm لـ 60 ألف خريج و على محور التراتيب

1cm لـ 8 ملايين نسمة .

تمرين محلول2: يعرض مصنع أسعار بالدينار لكمية مختلفة من مادة ينتجها كما يوضح الجدول التالي

الكمية x بالطن	300	400	500	600	700
السعر y بآلاف الدينارات	40	45	51	54	57

1- عين النقطة المتوسطة $\overline{G}(\overline{X};\overline{Y})$ لسحابة النقط $(x_i;y_i)$.

2- عين G_1 النقطة المتوسطة للنقطتين الأوليتين و G_2 النقطة المتوسطة للنقط الاخرى ثم تحقق أن G نقطة من المستقيم (G_1G_2) .

الحل

STAT

1) باستعمال الحاسبة و بعد إدخال القيم x_i و y_i في القائمتين L_1 و L_2 على الترتيب نستعمل اللمسة ثم (Calc) ثم (2:2-Vat Stats L_1 , L_2)

نحصل على $\overline{x} = 500$ و $\overline{y} = 49,4$ أي $G(500;49,4)$

2) $G_1(350;42,5)$ ، $G_2(600;54)$. معامل توجيه (G_1G_2) هو $a = \frac{54-42,5}{600-350} = 0,046$

معامل توجيه (G_1G) هو $a' = \frac{54-49,4}{600-500} = 0,046$. $a = a'$ معناه G ينتمي للمستقيم (G_1G_2)

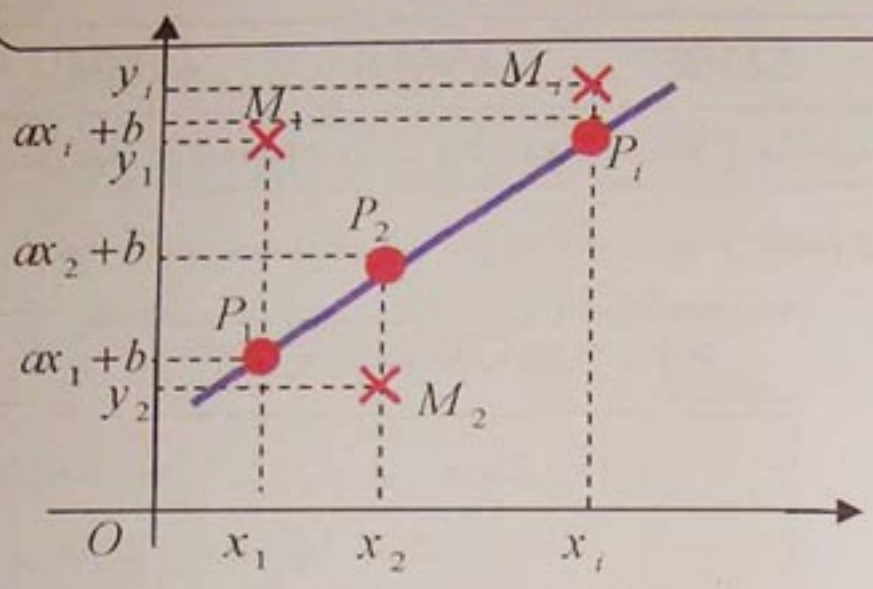
elbassair.net

التعديل الخطي :

تعريف :

القيام بتسوية خطية أو بتعديل خطي لسحابة نقط $M_i(x_i, y_i)$

يعني إيجاد دالة خطية تعبر بكيفية تقريبية عن Y بدلالة X



التعديل الخطي بالمربعات الدنيا :

عندما يكون لسحابة النقط المرفقة بسلسلة إحصائية لمتغيرين عدديين شكل متطاول ، نتساءل عن إمكانية إنشاء مستقيم تقع حوله نقط السحابة .

مبدأ المربعات الدنيا :

نحسب المجموع : $S = M_1P_1^2 + M_2P_2^2 + \ldots + M_nP_n^2$

أي : $S = \sum_{i=1}^{n} M_iP_i^2$ حيث M_i هي نقط السحابة ذات الإحداثيات $(x_i ; y_i)$ نقبل بوجود مستقيم (يسمى مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا) يشمل النقطة المتوسطة للسحابة و يجعل S أصغريا .

تعريف و مبرهنة :

مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا هو المستقيم الذي يشمل النقطة المتوسطة لسحابة النقط و معادلته المختصرة هي من الشكل $y = ax + b$ حيث:

$$a = \frac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \bar{x}\,\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \quad \text{و} \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

لأن النقطة المتوسطة $G(\bar{x} ; \bar{y})$ نقطة من مستقيم الانحدار

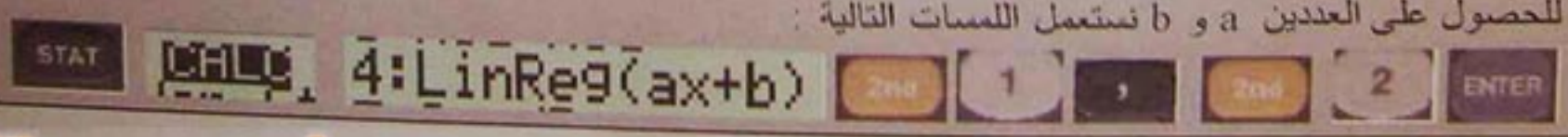
ملاحظة :

العدد a هو $a = \frac{Cov(x, y)}{V(x)}$ حيث

$$Cov(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)\left(y_i - \bar{y}\right) \quad \text{و} \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

شرح الكيفية بالحاسبة Ti83+

للحصول على العددين a و b نستعمل اللمسات التالية :



موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

تمرين محلول1: ندرس النسبة المخصصة لتكاليف (الماء ، الغاز ، الكهرباء و الهاتف) من دخل عائلي

السنة	1978	1984	1992	1994	2000	2004
x_i السنة (1970)	8	14	22	24	30	34
y_i النسبة (%)	4,4	5,2	4,3	3,2	3,3	2,8

1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم مختار بعناية ثم أحسب إحداثيي النقطة المتوسطة G (استعمل الحاسبة)

2) - التعديل بمستقيم الأطراف .

أحسب التزايد المتوسط السنوي لحصة التكاليف ثم استنتج المعادلة المختصرة للمستقيم (M_1M_6) (مستقيم الاطراف)

3) التعديل بمستقيم مايير (MAYER) : عين G_1 النقطة المتوسطة للنقط الثلاثة الأولى و G_2 النقطة المتوسطة للنقط الأخرى ثم استنتج المعادلة المختصرة للمستقيم (G_1G_2) ، أنشئ هذا المستقيم .

4) التعديل بمستقيم الإنحدار : أكتب معادلة مستقيم الإنحدار $y=ax+b$ ، بالحاسبة عين a و b ثم أنشئ هذا المستقيم .

5) أيّ المستقيمات أقرب للسحابة (استعمل الحاسبة Ti83+)

الحـل :

1) باتباع الخطوات المذكورة في النشاط (1) تظهر سحابة النقط على الشاشة .

2) التزايد المتوسط السنوي هو النسبة $\frac{2,8-4,4}{34-8}$ و هو معامل توجيه المستقيم (M_1M_6) و منه فمعادلته

$$y=\frac{2,8-4,4}{34-8}(x-\overline{x_1})+\overline{y_1} \quad \text{أي} \quad y=-0,061x+4,888$$

3) $G_1(14,66;4,63)$ و $G_2(29,33;3,1)$ و $y=-0,104x+6,154$

4) باتباع الخطوات المذكورة في الدرس (2) نحصل على $a=-0,0779$ و $b=5,579$

5) باتباع الخطوات التالية :

List Math 5 : $\text{Sum}((L_2+0,061\times L_1-4,888)\wedge 2)$

القائمة L_1 هي قيم x_i و القائمة L_2 هي قيم y_i نجد (2,037) بالنسبة لمستقيم الأطراف

بنفس الطريقة نجد 1,604 بالنسبة لـ (G_1G_2) و 1,284 بالنسبة لمستقيم الإنحدار

تمرين محلول2: إليك الجدول التالي

X	200	300	400	500	600
Y	30	35	41	44	47

1- عين a و b وسيطي معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا

2- نضع $Z=\frac{x}{100}$ و $V=\frac{y}{100}$. أكتب معادلة مستقيم الإنحدار (Z بدلالة V) . ماذا تلاحظ ؟ فسّر .

الحل باستعمال الحاسبة نتبع الخطوات التالية : $L_4=L_2+100$ و $L_3=L_1+100$

مّ L_3,L_4 Enter 4: LinReg (ax+b) . نلاحظ أن $a=0,043$ (لا يتغير)

بينما $b=0,222$ (يضرب في 0,01) لأن $b=\overline{y}-a\overline{x}$ (حسب خاصية الخطية للمتوسط الحسابي)

elbassair.net

التعديل بقطع مكافئ



يوضح الجدول التالي درجة التلوث
في مدينة صناعية على مدار سبع سنوات

السنة x_i	1	2	3	4	5	6	7
الدرجة y_i	9.8	9.6	9.7	10,3	11,5	12,7	14,6

باستعمال الآلة الحاسبة مثل سحابة النقط $(x_i ; y_i)$

التذكير بالخطوات

لإدخال قائمة الأعداد X_i و لتكن L_1 و قائمة الأعداد Y_i و لتكن L_2

1) STAT → 1:Edit...

2) STAT → 2nd → Y= → 1:Plot1...Off → ENTER → ON

ثم اختر القائمة L_1 ، القائمة L_2 والنوعية marque

3) ZOOM → 9:ZoomStat → ENTER

4) TRACE

للمعاينة أنقر تباعا على الأزرار
لتتبع نقط السحابة :

2) شكل السحابة يوحي بقطع مكافئ ذروته $x = 2$

نبحث عن تعديل من الشكل $f(x) = a(x-2)^2 + b$

نضع $z_i = (x_i - 2)^2$ أكتب L_3 قائمة القيم z_i

3) باتباع الخطوات السابقة مثّل على شاشة الحاسبة النقط $(x_i ; y_i)$

4) أكتب معادلة مستقيم الإنحدار بالمربعات الدنيا لـ y بدلالة z ، $(y = az + b)$ و مثّله على شاشة الحاسبة (تعطى قيمتي a و b مدورتين الى 10^{-1})

5) استنتج معادلة القطع المكافئ المعدّل لسحابة النقط $(x_i ; y_i)$

ملاحظة :

تستغل دالة التعديل للقيام باستكمالات داخلية أو خارجية

مثال :

يمكن توقع درجة التلوث خلال السنة العاشرة مثلا و ذلك بتعويض $x = 10$ في الدالة $f(x) = a(x-2)^2 + b$ لنجد قيمة y .

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

نقارن في الجدول التالي نسبتي الناجحين بدرجة جيد في امتحان البكالوريا في ثانويتين (1) و (2) خلال سنوات معينة كما يوضح الجدول .

السنة	1985	1990	1995	2000	2001	2002	2003
الرتبة x_i	0	5	10	15	16	17	18
الثانوية (1) y_i	3,7	3,2	4,2	5,8	6	6,5	6,4
الثانوية (2) z_i	9	7,5	10,2	8,2	7,4	7,7	8,3

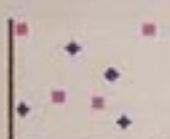
تعيين النزعة باستعمال المجدول إكسال

لتعيين مستقيمي الإنحدار بالمربعات الدنيا لسحابتي النقط $(x_i;y_i)$ و $(x_i;z_i)$ نملأ ورقة العمل كما يلي

تخصص الخلايا A2 ، B2 ، C2 و D2 للعناوين

- العمود الأول خاص بالسنوات من الخلية A3 الى الخلية A9
- العمود الثاني خاص بالرتبة x_i من الخلية B3 الى الخلية B9
- العمود الثالث خاص بالقيم y_i من الخلية C3 الى الخلية C9
- العمود الرابع خاص بالقيم z_i من الخلية D3 الى الخلية D9

تعيين سحابتي النقط في نفس المعلم

(قم بتحديد الحيز **B2:D9** من ورقة العمل ثم أنقر على زر  ثم نختار nuage de point و 
ثم إنهاء سيظر التخطيط المطلوب . أنقر بالزر الأيمن للفأرة على إحدى النقط تفتح نافذة ، أنقر على " إضافة خط اتجاه " ajouter un courbe de tendance) ثم اختر " خطي " (lineaire) ثم موافق

- ضف مستقيم الإنحدار للسحابة $(x_i;z_i)$ بنفس الكيفية

ملاحظة :

لإظهار معادلة منحنى النزعة ، أنقر باليمين على المستقيم ثم تتبع الخطوات التالية

1- تنسيق خط الاتجاه (format de la courbe de tendance)

2- خيارات (options)

3- عرض المعادلة على التخطيط (afficher l'equation sur le graphique)

4- موافق (ok)

للبحث عن تعديل آخر (أدق)

- أنقر باليمين على إحدى النقط ثم أنقر على " إضافة خط اتجاه " (ajouter un courbe de tendance) ثم اختر الشكل " متعدد الحدود " (polynomiale) و كذلك الرتبة التي تناسب كثير الحدود .
- ماهو الإختيار الذي يبدو أكثر ملائمة ؟

بنفس الطريقة أبحث عن تعديل أدق للسحابة $(x_i;z_i)$

- ماهي النسبة المتوقعة للناجحين بدرجة جيد في الثانوية (1) سنة 2008 ؟

elbassair.net

الأعمال الموجهة

الجزء الأول :

يوضح الجدول التالي عدد مستعملي الهاتف النقال في بلد ما

الشهر	12/1996	10/1997	5/1998	10/1998	2/1999	7/1999	9/1999	3/2000
الرتبة x_i	0	10	17	22	26	31	33	39
ع المستعملين y_i (بالمليون)	2,5	4,5	7,2	9,4	12	15	16,2	22,6

1) **القيام بالتعديل :**

أ) مثّل سحابة النقط للسلسلة $(x_i ; y_i)$ في معلم متعامد و متجانس (1cm يمثل 4 أشهر على محور الفواصل و 1cm يمثل 1 مليون على محور التراتيب)

ب) هل التعديل التآلفي مبرّر ؟ عين النقطة المتوسطة G ، أكتب معادلة (D) مستقيم التعديل لـــ y بدلالة x باستعمال طريقة المربعات الدنيا (a و b مقربتان إلى 10^{-2})

ج) أنشئ (D) .

2) **القيام بتعديل آخر : نعتبر الجدول**

الشهر	12/1996	10/1997	5/1998	10/1998	2/1999	7/1999	9/1999	3/2000
الرتبة x_i	0	10	17	22	26	31	33	39
$z_i = \ln(y_i)$	Ln(2,5)	Ln(4,5)	Ln(7,2)	Ln(9,4)	Ln(12)	Ln(15)	Ln(16, 2)	Ln(22, 6)

نعتبر السلسلة الإحصائية $(x_i ; z_i)$ حيث $(x_i ; y_i)$

أ) نقبل أن معادلة مستقيم التعديل لـــ z بدلالة x المحصل عليها بطريقة المربعات الدنيا هي $z = 0,056\,x + 0,961$

عبّر عن y بدلالة x ثم ضع y على الشكل $y = \alpha . e^{0,56x}$ (أوجد قيمة α مدورة الى 10^{-2})

ب) لتكن g الدالة المعرفة على [0 ; 50] بـــ $g(x) = 2,6e^{0,056x}$.

-باستعمال الحاسبة البيانية أنشئ بعناية (C) منحنى g

- أي التعديلين يبدو أقرب ؟

الجزء الثاني : سنقارب بالحساب التعديلين السابقين

1) حل المتراجحة $g(x) \geq 0$ ، استنتج السنة و الشهر الذي يكون انطلاقا منه عدد مستعملي النقال أكبر من 35 مليون (حسب النموذج الثاني)

2) نعتبر الدالة h حيث $h(x) = f(x) - g(x)$ ، أدرس تغيرات الدالة h (تعطى القيمة x_0 التي تعدم المشتقة h' مدورة الى الجزء الصحيح) لاحظ أن $g'(x_0) = 0,5$

3) ليكن (T) مماس (C) في النقطة ذات الفاصلة x_0 ، ماذا نقول عن (T) و (D) . أنشئ (T)

4) ماذا تمثل x_0 عند مقارنة f و g ؟

- بين أن h تنعدم من أجل قيمتين لـــ x هما x_1 و x_2 يطلب حصرا لكل منهما بين عددين صحيحين

5) ماذا يمثل x_1 و x_2 عند مقارنة f و g ؟

elbassair.net

الجزء الأول :

في بلدية ما يدفع المواطن ضريبة حس بدخله الشهري كما يوضحه الجدول :

x_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y_i	0	0,025	0,04	0,06	0,1	0,16	0,25	0,4	0,65	1

مثلا الزوج (0,25 ، 0,7) معناه 70% من المواطنين يدفعون 25% من الضريبة الكلية للبلدية .

1) أ) مثل سحابة النقط $(x_i ; y_i)$ (المعلم متعامد و متجانس ، الوحدة 10cm)

ب) هل التعديل الخطي مبرر ؟

2) نعتبر المتغير الاحصائي $z = \ln y$ من أجل قيم y الأكبر تماما من الصفر .

أ) أنقل و أكمل الجدول التالي (تقرب قيم z_i الى 0,01)

x_i	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
z_i	-3,69								

ب)أكتب معادلة للمستقيم المحصل عليه كتعديل خطي بطريقة المربعات الدنيا على الشكل $z = a x + b$

(يقرب a و b الى 0,1)

ج)استنتج علاقة بين x و y بالشكل $y = \alpha e^{a x}$ (تقرب قيمة α ا لى 10^{-2})

3) أنقل وأكمل الجدول بقيم مقربة الى 0,01 (قارن م ع الجدول السابق و علق)

x_i	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\alpha e^{a x}$									

الجزء الثاني :

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على [0 ; 1] كما يلي : $f(x) = 0,01 e^{4,6 x}$ و $g(x) = x - f(x)$

(c) منحنى f و (D) المستقيم الذي معادلته $y = x$

1) أ) باستعمال f(x) كتعديل لـــ y في الجزء الأول ، عين بنسبة 1% (مقربة) نسبة المواطنين الذين يدفعون نصف ضريبة البلدية .

ب) أدرس تغيرات الدالة f و أنشئ منحناها البياني و كذا المستقيم (D) في المعلم السابق .

2) أ) حل في المجال [0 ; 1] ، $f'(x) = 1$ ، الحل β يقرب الى 0,01

- أنشئ (T) مماس (C) في النقطة التي فاصلتها β .

ب) حل في المجال [0 ; 1] ، $f'(x) > 1$ و أوجد علاقة بين $f'(x)$ و $g'(x)$ ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة g

ج) من أجل أي قيمة لـ x تأخذ f أكبر قيمة ، فسر النتيجة هندسيا .

elbassair.net



أعطت نتائج دراسة حول منتوج مستهلك

السلسلة الإحصائية $(x_i;y_i)$ حيث x_i هو الثمن

بالدينار للكيلوغرام (Kg) و y_i الكمية المطلوبة بالطن .

الثمن x_i	100	115	120	130	137	150	165	188	200
الكمية y_i	5,8	5,2	5,1	4,8	4,6	4,3	4	3,7	3,5

1) مثل سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$ في معلم متعامد .

(1cm لكل 10 دينار على محور الفواصل و 2cm لكل طن على محور التراتيب)

- هل التعديل الخطي مبرّر ؟

2) - أكتب المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار (Δ) (y بدلالة x) (يعطى المعاملان مدوران الى 10^{-2})

- أنشئ هذا المستقيم في نفس المعلم .

- أحسب الكمية المطلوبة للمنتوج بالنسبة لثمن مقداره 245 دينارا للكيلوغرام .

3) نضع $z = \frac{100}{y}$ ، أحسب القيم z_i مدورة الى 10^{-1} ثم عين المعادلة المختصرة لمستقيم الإنحدار (z بدلالة x)

(يعطى المعاملان مدوران الى 10^{-2})

- استنتج الدالة f التي ترفق الثمن x الكمية المطلوبة y حسب هذا التعديل و تحقق أن $f(245) \approx 3,09$

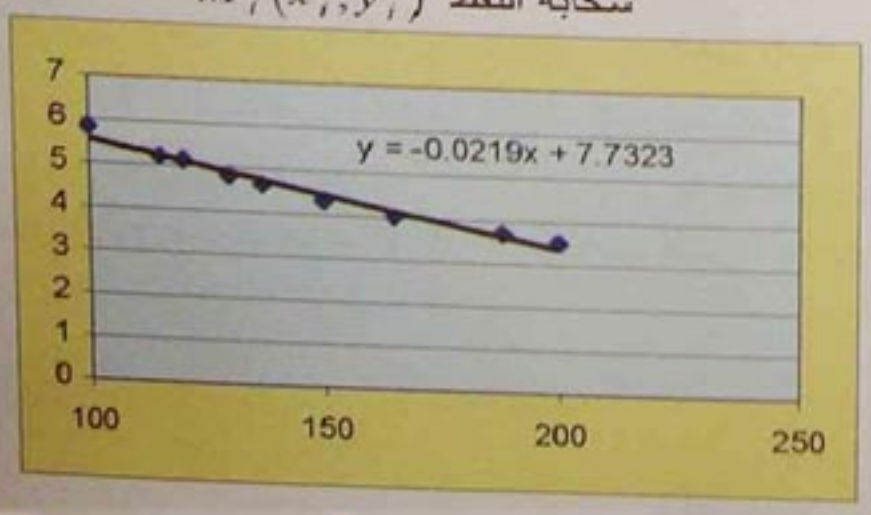
4) نعلم أنه من أجل الثمن 245 دينارا تكون الكمية المطلوبة للمنتوج 3,2 طن

- أيّ التعديلين أدق ؟

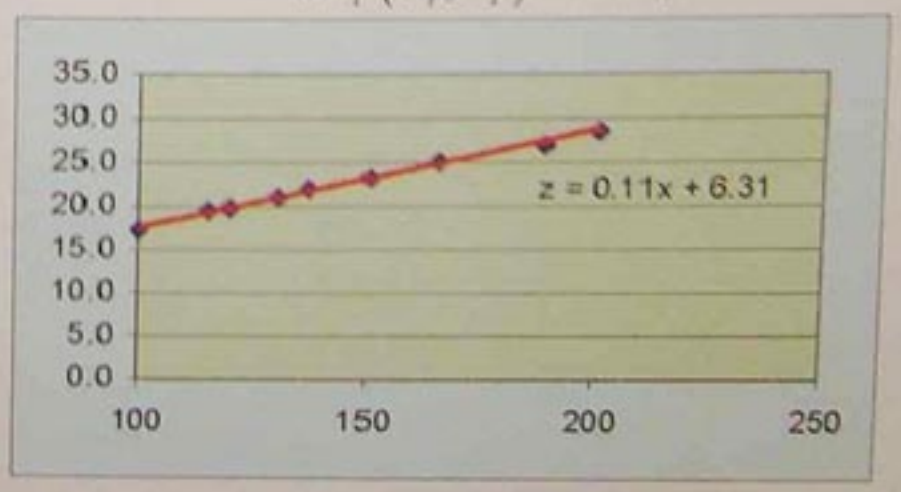
حل مختصر

الثمن x_i	100	115	120	130	137	150	165	188	200
الكمية y_i	5.8	5.2	5.1	4.8	4.6	4.3	4	3.7	3.5
z_i	17.2	19.2	19.6	20.8	21.7	23.3	25.0	27.0	28.6

سحابة النقط $M_i(x_i;y_i)$



سحابة النقط $M'_i(x_i;z_i)$



elbassair.net

موقع عون التعليمي

استعد للباكالوريا



يوضح الجدول التالي ثمن شراء عشر شاحنات
(بمئات آلاف الدنانير أي 100.000 DA)
و ما يقابله من استهلاك للبنزين
متوسط (باللتر في كل 100 KM)
أي (L/100)

ثمن الشراء x_i	30,82	31,2	31,62	32,25	33,65	34,4	34,8	36,2	36,8	43,4
الأستهلاك y_i	7,4	7,6	7,7	7,8	8,4	8,5	8,6	8,9	9	9,8

1) مثّل سحابة النقط $(x_i ; y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O'(30,7)$ و بوحدة 1cm لكل 100.000 دينار (فواصل)
و 1cm لكل 0,5L (تراتيب) .
- هل التعديل الخطي مبرّر ؟
2) عين إحداثيي G النقطة المتوسطة للسحابة و علّم G في نفس المعلم .
3) - أكتب معادلة (Δ) مستقيم التعديل الخطي بالمربعات الدنيا على الشكل $y = ax + b$
- أنشئ (Δ) في نفس المعلم
4) اشترى أحد الخواص شاحنة بثمن 6510000 دينارا ، باستعمال التعديل الخطي السابق
- بكم يقدر الإستهلاك المتوسط في كل 100 كيلومتر لهذه الشاحنة ؟
5) لاحظ المشتري أن الإستهلاك هو 13 لتر في كل 100 كيلومتر
- هل التعديل الخطي المقترح مناسب ؟

إرشادات

يمكن التحقق من النتائج باستعمال الحاسبة (TI83)
1- إدخال القائمتين L_1 و L_2
2- تمثيل السحابة $(x_i ; y_i)$ (مع الإختيار الأنسب للمعلم باللمسة WINDOW)
3- حساب $\bar{x}$ و $\bar{y}$
4- حساب a و b
5- تعويض x = 65,1 في المعادلة

حل صفحة المقدمة

الفئات	المراكز x_i	التكرار n_i	%	تكرار مجمع صاعد	$n_i x_i$
[14 ; 16 [	15	20	5	20	300
[16 ; 18 [	17	64	16	84	1088
[18 ; 22 [	20	112	28	196	2240
[22 ; 24 [	23	84	21	280	1932
[24 ; 26 [	25	40	10	320	1000
[26 ; 30 [	28	80	20	400	2240

الآن سعيد فعلا سعيد و هو يبعث بخلص تشكراته لكل من اهتم بمشكلته و ساعده بقليل من التفكير.

elbassair.net

تمارين

1 . سلسلة إحصائية ذات متغيرين

1 أحسب معدل السلاسل التالية (دون حاسبة)
باستعمال خواص الخطية للمعدل

أ) 101 102 103 104 105 106

ب) 23550 23575 23600 23650 23700

ج) 0,0052 0,0055 0,0057 0,0062

د) 16 14 9 12 10 10 13 14 17

2 1) أحسب معدل السلاسل التالية و معدل مربعاتها

أ) 2 5 7 8 4 12 7 9 10 11

ب) 0,4 0,1 0,2 0,3 0,5 0,1

2) معدل مربعات قيم السلسلة هل يساوي مربع معدل قيم السلسلة ؟

3 باستعمال الحاسبة ، أحسب المعدل والانحراف المعياري للسلاسل التالية :

أ) 2,4 3,1 2,3 0,1 3,3 1 1,9 2,5 2,2
0,9 1,6 2,6 1,2 3,5 2,4

ب) 11 12 10 11 12 13 10 13 11 14 12 13

ج) 2 5 18 5 2 12 2 5 12 7 6 16 15 12 17 4
7 10

4 السلسلة المرتبة التالية تمثل علامات تلاميذ في اختبار ما

4	4	4	4	5	6	6	6	6	6	7
7	8	8	8	8	8	9	9	10	11	11
11	12	12	13	13	14	15	16	18		

1.حدد الوسيط و الربعيين الأول و الثالث.
2.أدخل هذه السلسلة في الآلة الحاسبة و أنشئ المخطط بالعلب و استخرج Q_1 و Me و Q_3 ثم احسب بالآلة هذه القيم ، هل هي نفسها ؟
3.أنشئ المخطط بالعلب باستعمال القيم المتحصل عليها حسابيا في السؤال (1).
أحسب الوسط الحسابي و قارنه مع الوسيط.

5 نعتبر السلسلتين الإحصائيتين التاليتين:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	0,42	0,76	0,60	0,08	0,21

x_i	6	7	8	9	10
y_i	0,92	0,61	0,58	0,3	0,26

t_i	1	2	3	4	5
z_i	15,9	16,0	17,0	17,5	17,8
t_i	6	7	8	9	10
z_i	18,0	18,5	19,0	20,3	20,1

1) مثل سحابة النقط $(x_i;y_i)$ في معلم متعامد طول الوحدة على محور الفواصل 1 cm و على محور التراتيب 10 cm

2) مثّل سحابة النقط $(t_i;z_i)$ في معلم مناسب

6 إليك الجدول التالي:

t_i	1996	1997	1998	1999	2000	2001
x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	4,399	4,305	4,157	4,188	4,201	4,353

1) مثل سحابة النقط $(t_i;y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O\,(1996;4,1)$ و بوحدة 2cm لكل وحدة على محور الفواصل و 1cm لكل 0,05 على محور التراتيب

2) بأية تحويلة يمكن الحصول على سحابة النقط $(t_i;y_i)$ انطلاقا سحابة النقط $(x_i;y_i)$ ؟

7 1) من أجل كل سلسلة في التمرين (5) أحسب إحداثيي النقطة المتوسطة .

2) حدد في كل حالة النقطة المتوسطة على سحابة النقط

8 الجدول التالي يبين x_i نسبة الأمية و y_i متوسط عمر النساء في 15 دولة نامية .

x_i	30,2	57,8	43,4	21,7	38,4
y_i	55	59,4	56,8	57,6	50,3
x_i	28,6	31	22,7	51,4	45,6
y_i	58,7	55,5	58,9	52,4	56,4
x_i	52,5	47,1	69,1	35,7	25,8
y_i	51,5	52,7	41	47,5	54,6

1) أحسب إحداثيي النقطة المتوسطة $G\,(\overline{x};\overline{y})$

elbassair.net

2) مثل هذه السلسلة ذات المتغيرين في معلم متعامد مبدؤه $O(20;40)$ و بوحدة 1cm لـ 2% على محور الفواصل و 1cm لكل سنتين على محور التراتيب و بين النقطة المتوسطة على البيان.

9 أوجد إحداثيي النقطة المتوسطة للسلسلة (x_i, y_i) المعطاة في التمرين (6) و استنتج دون حساب إحداثيي النقطة المتوسطة للسلسلة (x_i, y_i) . حدد خاصية المعدل المستعمل .

10 نعتبر السلسلة (x_i, y_i) التالية تمثل إنتاج الحبوب في الجزائر (الوحدة : مليون قنطار)

x_i	1962	1968	1976	1978	1980
y_i	23	16	23,1	15,3	24,2

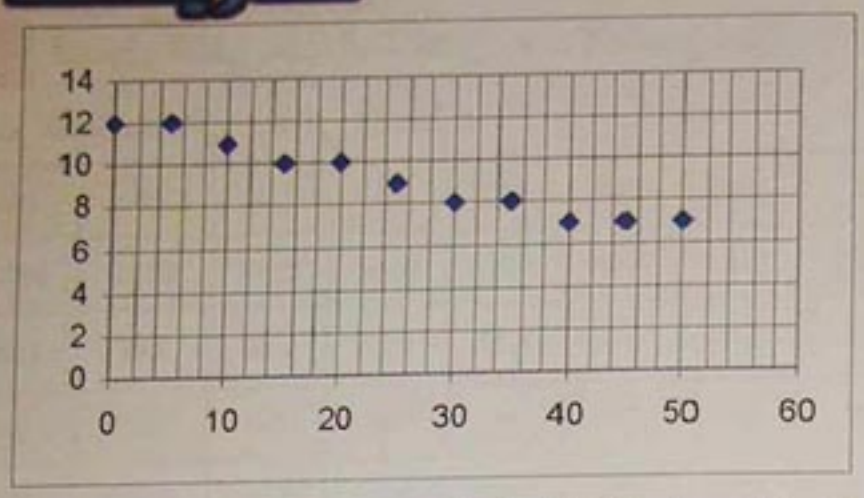
x_i	1982	1990	1997	2001	2002
y_i	15,2	16,2	8,6	26,5	19,5

المصدر :الديوان الوطني للإحصاء (الجزائر بالأرقام 2005)

– مثل سحابة النقط لهذه السلسلة على الحاسبة البيانية ثم حدد بالحساب إحداثيتي النقطة المتوسطة G .

11 بتوظيف سلسلة التمرين السابق (رقم 10) .
القيم x_i في القائمة (1) و القيم y_i في القائمة (2)
1) نضع $d_i = x_i - 1980$. ما الحساب المطلوب إنجازه على القائمتين للحصول على القيم d_i ؟
2) حدد النقطة المتوسطة G_2 لسحابة نقط السلسلة (d_i, y_i) باستعمال خواص المعدل .
3) مثل السلسلة (d_i, z_i) في معلم متعامد مناسب

12 التمثيل البياني التالي يبين نسبة النمو الديموغرافي في الإتحاد الأوربي (%) (25 دولة مجتمعة)
بين سنوات 1960 و 2002 بالنسبة للنمو الديموغرافي العالمي .



1) ما تفسيرك للنقطة الواقعة على محور التراتيب ؟
2) أنشئ جدول للقيم المبينة على هذا المعلم ؟
3) أحسب إحداثيي النقطة المتوسطة G للسحابة.
4) كيف تصبح إحداثيي النقطة المتوسطة G' إذا غيّرنا المعلم ليصبح محور التراتيب محورا للسنوات ؟

13 من أجل تمثيل أمثل لسحابة نقط ، ينبغي أثناء اختيار المعلم أن ننتبه لطبيعة قيم السلسلة .
الجدول التالي يمثل إنتاج البترول في الجزائر (الوحدة : ألف برميل)

x_i	1992	1993	1994	1995	1996
y_i	742	746	752	762	807
x_i	1997	1998	1999	2000	2001
y_i	811	826	858	893	874

1) أ) نأخذ $x_i = 0$ في 1992 و z_i القيمة المدورة إلى 10^5 لكمية الإنتاج (مثلا $x_i = 4$ ، $z_i = 8$)
– أعط السلسلة المضاعفة الجديدة . ما تعليقك ؟
2) خذ مبدأ السنوات 1992 و $d_i = \frac{y_i - 700}{100}$
– أعط السلسلة المضاعفة الجديدة . ما تعليقك ؟
3) استفادة من السؤالين السابقين اختر معلما مناسبا يؤكد القراءات التالية :
أ) منذ 1992 ، إنتاج البترول في تزايد .
ب) يشهد إنتاج البترول في الجزائر تطور هاما : حوالي 20000 برميل إضافي سنويا .
ج) إنتاج البترول يشهد استقرارا نسبيا منذ 1992 .

elbassair.net

تمارين

14 الجدول التالي عدد المتقاعدين r_i بالآلاف و نسبة النمو الديموغرافي t_i في بلد ما :

x_i	1990	91	92	93	94	95	96
r_i	7316	7618	7936	8241	8508	8750	8971
t_i	1,88	1,79	1,77	1,66	1,62	1,61	1,56
x_i	97	98	99	00	01	02	03
r_i	9182	9384	9589	9701	9844	10012	10203
t_i	1,54	1,54	1,56	1,59	1,60	1,65	1,62

أ) أدخل القيم في ثلاث قوائم على الآلة الحاسية واحسب إحداثي النقطة المتوسطة G للسلسلة (x_i, y_i)

ثم إحداثيي النقطة المتوسطة H للسلسلة (x_i, t_i)

ب) من أجل كل من المعلومات التالية ، أوجد تغييرا للمعلم (المبدأ أو السلم) مناسبا (يؤكد المعلومة و يوضحها)

أ) عدد المتقاعدين ازداد بقوة منذ 1990 ، حوالي 300000 متقاعد إضافي خلال 13 سنة !

ب) نسبة النمو الديموغرافي تؤول إلى الاستقرار منذ 1994

ج) نسبة النمو الديمغرافي في تباين كبير منذ 1990 .

2- التعديل الخطي بالمربعات الدنيا

15 الجدول التالي يبين دراسة نسبة الكراء في مدخول المواطن

a	1978	84	92	94	00	64
$x_i = a - 1970$	8	14	22	24	30	34
y_i (%)	4,4	5,2	4,3	3,2	3,3	2,8

1) مثل سحابة النقط (x_i, y_i) في معلم متعامد مختار جيدا

- أحسب إحداثيي النقطة المتوسطة G للسحابة .

2) التعديل بمستقيم (الطرفين)

أحسب التزايد المتوسط السنوي لنسبة الكراء و استنتج معادلة مختصرة للمستقيم (M_1M_2)

3) التعديل بمستقيم ماير (Mayer)

حدد إحداثيي النقطة المتوسطة G_1 للنقط الثلاث الأولى و النقطة المتوسطة G_2 للنقط الثلاثة الأخيرة .

- أكتب معادلة مختصرة للمستقيم (G_1G_2) و أنشئه على البيان .

4) التعديل بمستقيم الإنحدار :

أوجد معادلة مستقيم الإنحدار $y = ax + b$. تعطى a و b مدورة بثلاثة أرقام . أنشئ هذا المستقيم .

5) التخمين :

باستعمال كل من التعديلات السابقة قدّر نسبة الكراء سنة 2010 ثم سنة 2030 حسب التعديل بمستقيم الإنحدار .

16 الجدول التالي يبين متوسط العمر لدى النساء في إحدى الدول المتقدمة .

a_i	1990	1991	1992	1993	1994	1995
	80,9	81,1	81,4	81,4	81,8	81,9
a_i	1996	1997	1998	1999	2000	2001
	82,0	82,3	82,4	82,4	82,7	82,7

نضع $x_i = a_i - 1990$ و $y_i = q_i - 1990$

1) أكتب معادلة مختصرة لمستقيم الإنحدار y بدلالة x ، تعطى المعاملات مدورة إلى 10^{-3}.

2) أ) حسب هذا التعديل الخطي ، ما هو التزايد المتوسط لمتوسط العمر خلال 10 سنوات ؟

ب) أحسب متوسط العمر المتوقع سنة 2005 .

ج) في أية سنة يتجاوز متوسط العمر 85 سنة ؟

3) متوسط العمر للنساء في سنة 2004 كان 83,8 سنة . هل التعديل الخطي بالمربعات الدنيا يعطي هذه النتيجة ؟ أعط بالنسبة المئوية الخطأ المرتكب .

17 الجدول التالي يبين مدى تأثر قضيب معدني طوله $l_0 = 1005mm$ بالحرارة (تمدد و انكماش) (Δ_i مقدار تمدد القضيب بالميليمتر mm و θ_i درجة الحرارة بالدرجة المئوية $^\circ C$)

θ_i	10	20	30	40	50
Δ_i	0,34	0,51	0,66	0,76	0,89

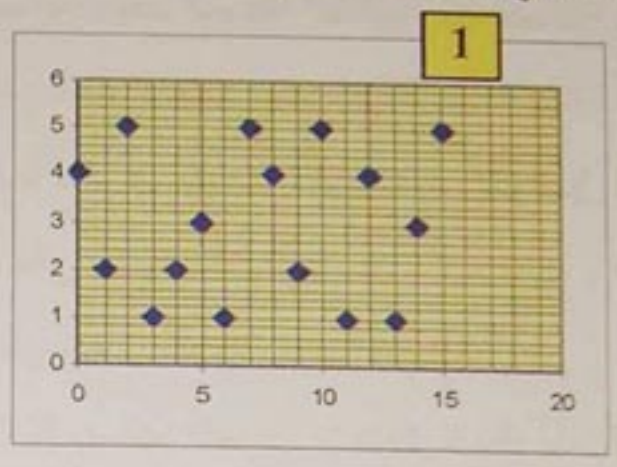
نضع $x_i = \dfrac{\theta_i - 30}{10}$ و $y_i = 100\Delta_i - 66$

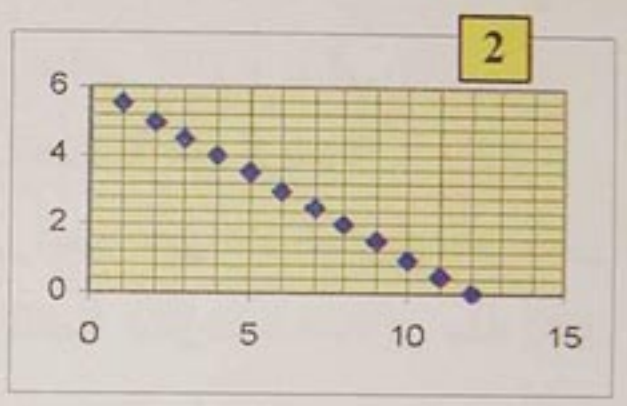
elbassair.net

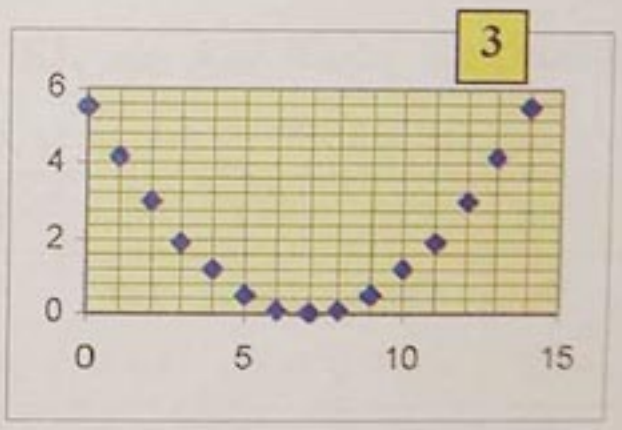
1.أكتب معادلة مستقيم الإنحدار

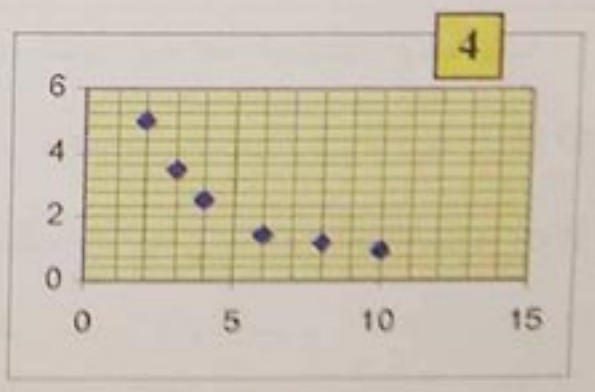
2.استنتج معامل التمدد الخطي للقضيب في حدود درجات الحرارة المعطاة .

18 إليك أربع تمثيلات لسحابات نقط مختلفة:









1) من أجل كل سحابة نقط ، هل التعديل الخطي هو الأفضل و المناسب ؟

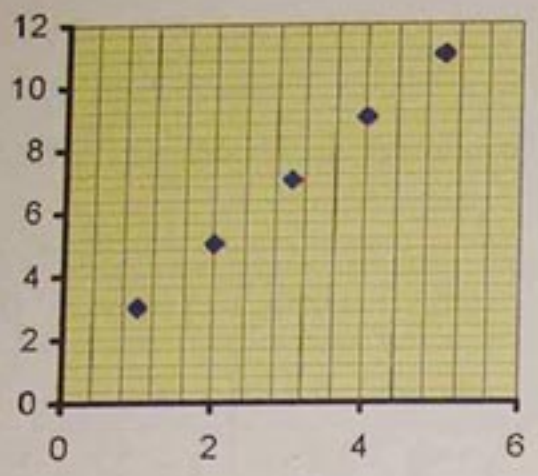
2) إعط معامل توجيه لمستقيم التعديل للسحابة (2) .

3) ما هي السحابة التي يمكن تعديلها بدالة المقلوب ؟

4) ما هي السحابة التي يمكن تعديلها بقطع مكافئ ؟

أكتب معادلة هذا القطع المكافئ .

19 إليك سحابة النقط لسلسلة إحصائية ذات متغيرين



1)أنشئ جدول للقيم في التمثيل

2) نقط السحابة في استقامية،أكتب معادلة المستقيم بالشكل المختصر .

3)أحسب المجموع $S=\sum\left(y_i-(ax_{i+b})\right)^2$

- ماذا تستنتج ؟

20 قصد ضبط أسعار تذاكرها قامت وكالة سفر بدراسة عدد زبائنها خلال 6 سنوات فكانت النتائج .

x_i	1997	98	99	2000	01	02
y_i	227	220	215	228	237	242

(الوحدة : مائة مسافر)

1) مثل سحابة النقط $(x_i;y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O\,(1997;210)$ و بوحدة 2cm لكل سنة على محور الفواصل و 1cm لكل 250 على محور التراتيب

2) أكتب معادلة مستقيم الإنحدار y بدلالة x ، المعاملان a و b مدوران إلى 10^{-1}.

- أعط تفسيرا واقعيا للعدد b .

3) أ) نضع $T=X-1997$

نعتبر سحابة النقط $(t_i;y_i)$.

- سحابة النقط $(x_i;y_i)$ هل هي نفسها سحابة النقط

elbassair.net

$(t_i;y_i)$ ؟ علل .

ب) اعط معادلة مستقيم التزايد y بدلالة t بمعاملين a' و b' مدوران الى 10^{-1} ، قارن بين a و a'

ج) بين الخطوات الحسابية التي تمكننا من حساب b' من العدد b .

21 الجدول التالي يبين تطور عدد الأطباء x_i و الصيادلة y_i في الجزائر

a_i	1963	1976	1985	1994	2002
n_i	0	13	22	31	39
x_i	1278	3875	13221	25796	35369
y_i	240	805	1403	3425	5198

1) باستعمال الحاسبة البيانية مثّل سحابة النقط $(x_i;y_i)$

2) أ) أوجد معادلة مستقيم الإنحدار . تعطى a مدورة إلى 10^{-3} و b مدورة إلى الوحدة .

ب) أعط تفسيرا واقعيا للعدد a .

ج) هل يمكننا القول أن عدد الصيادلة يزداد لأن عدد الأطباء يزداد ؟

3) نضع $T=\frac{X}{1000}$ و $Z=\frac{Y}{1000}$

أ) مثّل مرة أخرى سحابة النقط $(t_i;z_i)$

- هل هي نفسها سحابة النقط السابقة ؟ علل

ب) أوجد معادلة مستقيم الإنحدار a' b' .

يعطى المعاملان a' b' مدوران إلى 10^{-3} .

- قارن بين a و a'

ج) حدد الخطوات الحسابية لإيجاد b' انطلاقا من b

4) بالحاسبة مثّل السحابتين $(n_i;x_i)$ و $(n_i;y_i)$

- من أجل كل سحابة نقط ، هل التعديل الخطي مبرر ؟

- كيف تشرح جوابك الآن عن السؤال (2 ج)

22 الجدول التالي يبين تغير عدد المدارس في بلد ما بالآلاف بين سنوات 1770 و 2003

x_i السنوات	1970	1980	1995	2003
y_i عدد المدارس	74,5	67,6	61,8	57,1

1) أ) مثّل سحابة النقط الموافقة للسلسلة الإحصائية $(x_i;y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O(1970;50)$ و بوحدة 2cm لكل 5 سنوات على محور الفواصل و 2cm لكل 5 آلاف على محور التراتيب .

ب) هل يمكن إنجاز تعديلا خطيا ؟ لماذا ؟

2) أكتب معادلة مستقيم التعديل y بدلاة x بطريقة المربعات الدنيا باستعمال الحاسبة و أرسم هذا المستقيم في المعلم السابق بتدوير a إلى 10^{-3} و b إلى 0,1 .

- هل يمكن تعيين b على الرسم ؟

3) بفرض أن التغير على عدد المدارس يبقى بنفس الوتيرة في السنوات القادمة ، قدّر عدد المدارس سنة 2005 ثم سنة 2020 (مدور الى 0,1).

23 الجدول التالي يبين كمية الأمطار المتساقطة على الغرب الجزائري بين سنوات 1990 و 2001

x_i	1990	1991	1992	1993	1994	1995
y_i	50	120	130	100	95	145
x_i	1996	1997	1998	1999	2000	2001
y_i	150	40	140	130	50	40

1) مثّل سحابة النقط الموافقة للسلسلة الإحصائية $(x_i;y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O(1990;40)$ و بوحدة 1cm لكل سنة على محور الفواصل و 1cm لكل 10 ميليلتر على محور التراتيب .

2) أ) أوجد معادلة مستقيم الإنحدار بطريقة المربعات الدنيا . يعطى a و b مدوران إلى 10^{-3} .

ب) أرسم هذا المستقيم في المعلم ، هل هو تعديل جيد ؟

ج) بفرض أن تساقط الأمطار يبقى بهذه الكيفية المتذبذبة،

elbassair.net

- اعط تقديرا لكمية الأمطار سنة 2005 .

3) أوجد مستقيم الإنحدار y بدلالة x فقط من أجل سنوات 1998 الى 2001 .

- ما تقديرك لكمية الأمطار سنة 2005 مع هذا التعديل ؟

24 الجدول التالي يوضح انخفاض درجة الحرارة θ_i كلما غصنا في عمق الأرض (وحدة الحرارة θ_i :الدرجة المئوية $^\circ C$ ، وحدة العمق x_i : متر m)

مكان الحفر : عند درجة العرض 7,5 مائوية

تاريخ الحفر : جويلية

x_i	0	100	200	400	800	1000
θ_i	26,8	18,5	10,7	7,7	5,1	4,8

نضع $t_i = \frac{x_i}{100}$

1) مثل سحابة النقط $(t_i;\theta_i)$

2) أكتب معادلة مستقيم الإنحدار بمعاملين a و b مدورين الى 0,01

3) استنتج التقلص الحراري الخطي في حدود درجات الحرارة المعطاة .

4) ما تقديرك لدرجة الحرارة في عمق مقدارة 1 Km ؟

25 باستعمال الحاسبة البيانية

أدخل في القائمة (1) القيم x_i و في القائمة (2) القيم y_i

x_i	1	3	5	7	9	11	13
y_i	2,3	2,8	3,5	3,7	4	4,1	4,7

1) أظهر على الشاشة سحابة النقط $(x_i;y_i)$

2) نريد انجاز تعديل بمستقيم يشمل النقطتين ، الأولى و الأخيرة و نقبل أن معادلته $y = 0,2x + 2,1$

3) اعط تفسيرا بيانيا للمجموع

$$S = \sum (y_i - (0,2x + 2,1))^2$$

- أحسب S بطريقتين مختلفتين

• على القائمتين : STAT 1:Edit...

L3=L2-(0,2×L1+2,1) ENTER

تمارين

L3 STAT CALC 1:1-Var Stats

ثم نقرأ $\sum$

• على شاشة الحساب :

$Sum(L2-(0,2\times L1+2,1))^2$ ENTER

ثم نقرأ النتيجة .

(هذه الخطوات خاصة بالآلة الحاسبة Ti83+)

4) أوجد معادلة مستقيم الإنحدار بطريقة المربعات الدنيا . يعطى a مدورا إلى 10^{-3} و b مدورا إلى 0,1

- أحسب $S' = \sum (y_i - (0,184x_i + 2,3))^2$

ثم قارن بين S و S'

- أي التعديل أفضل لسحابة النقط ؟

تمارين للتعمق

26 الجدول التالي هو عبارة عن دراسة إحصائية لنسب الإنفاق على البحث العلمي في إحدى الدول

x_i	1992	1993	1994	1995	1996	1997
y_i	2,38	2,4	2,34	2,31	2,3	2,22
x_i	1998	1999	2000	2001	2002	
y_i	2,17	2,18	2,18	2,23	2,2	

1) مثل سحابة النقط $(x_i;y_i)$ في معلم متعامد مبدؤه $O(1990;2\%)$ و بوحدة 1cm لكل سنة على محور الفواصل و 1cm لكل 0,05% على محور التراتيب .

2) أ) أعط معادلة لمستقيم التعديل بطريقةالمربعات الدنيا . يعطى a و b مدورين الى 10^{-3}

ب) أرسم هذا المستقيم في المعلم السابق . هل هذا ج) بفرض أن تغير النسب يبقى على هذه الوتيرة في السنوات القادمة ، قدّر النسبة المئوية لانفاق الدولة على البحث العلمي في سنة 2005 .

3) أ) أعط معادلة لمستقيم التعديل لـ y بدلالة x فقط من أجل السنوات من 1998 الى 2002

elbassair.net

ب) ماذا ترى في نسبة الإنفاق سنة 2005 مع هذا التعديل الأخير .التعديل جيد (مناسب).

27 باستعمال معطيات التمرين (15)

أ) من أجل المستقيم (G_1G_2) ذي المعادلة $y = mx + p$

أحسب المجموع $S = \sum (y_i - (mx_i + p))^2$

ب) من أجل المستقيم (M_1M_2) ذي المعادلة

$y = m'x + p'$

أحسب المجموع $S' = \sum (y_i - (m'x_i + p'))^2$

ج) من أجل مستقيم الإنحدار لـــ y بدلالة x ذي المعادلة

$y = ax + b$

أحسب المجموع $S'' = \sum (y_i - (ax_i + b))^2$

د) قارن بين S ، S' و S"

- ما هو التعديل الأدق (الأفضل)

28 في دراسة إحصائية تبين عدد السياح سنويا في إحدى الجزر النائية و عدد السياح ذوي الجنسية A خصوصا نتج الجدول التالي

a_i	1996	97	98	99	00	01
y_i	6200	6820	7390	8090	9280	9960
(A)z_i	154	165	200	224	266	?

نضع x_i رتبة السنة a_i حيث $x_i = a_i - 1996$

1) أ) حدد النقطة المتوسطة M للسلسلة $(x_i ; y_i)$ ثم النقطة المتوسطة G للسلسلة $(x_i ; z_i)$.

ب) في معلمين متعامدين أنشئ النقط $(x_i ; y_i)$ و $(x_i ; z_i)$ و كذا النقطتين M و G .

2) أ) باستعمال الحاسبة أوجد معامل توجيه مستقيم الإنحدار (D) لـــ y بدلالة x باستعمال طريقة المربعات الدنيا (تعطى القيمة مدورة الى الوحدة)

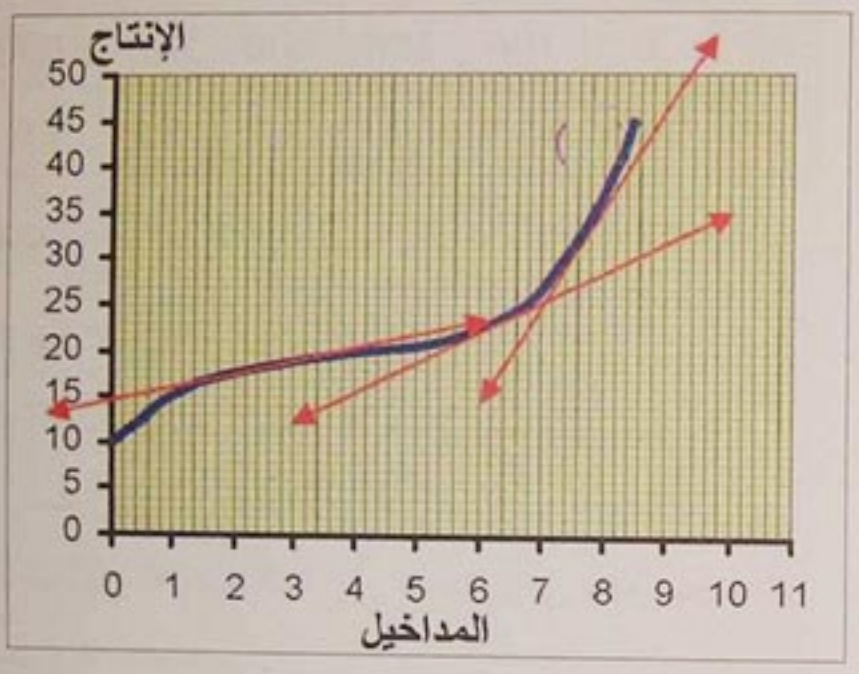
ب) باستنتاج معادلة (D) ، أنشئه

3) بالمثل ، أوجد معادلة لمستقيم الإنحدار (d) لـــ z بدلالة x بالمربعات الدنيا ثم أنشئه .

4) بتوظيف هذين التعديلين أعط تقديرا لعدد السياح الذين يتوقع زيارتهم للجزية و كذا تقديرا للسياح من الجنسية (A)

مسائل

29 المنحنى البياني التالي يبين كمية إنتاج مادة ما x_i (الوحدة : الطن) لمؤسسة إنتاجية و المداخيل المحصل عليها y_i (الوحدة : ألف دينار) مع العلم أن كل الإنتاج يباع بمجرد خروجه من المؤسسة



I) دراسة المحصّلة :

الجدول التالي يبين المداخيل المحصل عليها y_i (الوحدة : ألف دينار) بعد بيع الإنتاج x_i (الوحدة : الطن)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	7	9,5	14	21	23,5	30	37	43	44	50

1) مثّل سحابة النقط الموافقة للسلسلة الإحصائية $(x_i ; y_i)$ في معلم متعامد كالسابق

2) - أحسب إحداثيتي النقطة المتوسطة G_1 للسحابة المشكلة بالنقط الخمسة الأخيرة .

- أكتب معادلة مختصرة للمستقيم (G_1G_2)

3) اكتب معادلة للمستقيم (OM_{10}) حيث O مبدأ المعلم و M_{10} النقطة العاشرة في السحابة .

elbassair.net

الكمية x_i	10	25	35	50	65	70
سعر العرض y_i	4,9	6,05	6,05	6,75	9,35	9,8
سعر الطلب z_i	11	7	6	5	4,4	4,2

4) بالحاسبة ، أوجد معادلة لمستقيم الإنحدار y بدلالة x بالمربعات الدنيا . يعطى المعملان مدوران إلى 10^{-3} .

- اشرح لماذا تسمى هذه الطريقة بالمربعات الدنيا ؟

II) دراسة الكلفة الإجمالية :

المنحنى (C) يمثل االكلفة الكلية f المعرف على $[0;10]$

- أنقل المنحنى في معلم سحابة النقط .

- حدد الملاحظات الصحيحة و صحح الخاطئة مما يأتي

1) التكاليف الثابتة هي 10 دنانير .

2) $f'(4)$ تقريبا معدومة

3) $f'(7)=\frac{4}{3}$

4) من أجل إنتاج 7 أطنان ، التكلفة المتوسطة للكيلوغرام هي 3 دنانير

III) دراسة الفائدة :

نفرض أن المحصلة معطاة بالمستقيم (OM_{10})

1) - أرسم المستقيم في معلم السحابة و المنحنى

- حدد بيانيا النقط الصماء (حيث الفائدة معدومة)

2) من أجل أي كمية يكون الإنتاج مربحا ؟

3) أرسم بدقة مماس المنحنى (C) المار من المبدأ ، حدد معامل توجيهه و اعط قراءة في إنتاج المؤسسة .

30 على مستوى سوق الجملة للخضار و الفواكه يعرض التجار سلعة كثر الطلب عنها من قبل المستهلكين بعدما جلبوها و جمعوها من الفلاحين المنتجين .

الكميات المعروضة بالأطنان ، السعر المحدد من قبل المنتجين هو سعر العرض (الوحدة : دينار جزائري للكغ).

السعر الذي سيدفعه المستهلك حسب الكمية هو سعر الطلب.

و من أجل 50 طن ، سعر العرض هو 8 دنانير للكيلوغرام و سعر الطلب هو 5 دنانير للكيلوغرام

نستعمل معلما متعامد و بوحدة 1cm لكل 5 طن على محور الفواصل و 1cm لكل 1 دينار على محور التراتيب.

1) أ) مثّل سحابة النقط الموافقة للسلسلة الإحصائية $M_i(x_i;y_i)$ و أحسب إحداثيي النقطة المتوسطة G للسحابة ثم حددها على المعلم .

ب) بالحاسبة ، أوجد معادلة لمستقيم الإنحدار y بدلالة x بالمربعات الدنيا . يعطى المعملان مدوران إلى 10^{-2} .

نرمز بـ f **لدالة العرض للمنتوج** التي منحناها مستقيم (Δ) يطلب رسمه .

ج) ما ثمن العرض من أجل كمية تقدر بـ 60 طن ؟

2) أ) في نفس المعلم مثّل سحابة النقط $N_i(x_i;z_i)$

ب) نقترح تعديلا لسحابة النقط باستعمال دالة معرفة على المجال $[0;100]$ معرفة كمايلي

$g(x)=a+\frac{b}{x+10}$ حيث a و b عددان حقيقيان

- علما أن منحنى الدالة g يمر بالنقطتين $N_1(10;11)$ و $N_4(50;5)$ أوجد العددين a و b .

- أرسم منحنى الدالة g . **(g هي دالة الطلب)**

3) نقطة التوازن :

يتحقق التوازن في سوق ما إذا كان العرض يساوي الطلب.

أ) حل المعادلة $0,08x+4=2+\frac{180}{x+10}$

ب) استنتج كمية التوازن مدورة الى 0,1 طن ثم سعر التوازن

- إشرح و مثّل النتيجة على البيان.

elbassair.net

اختبر معلوماتك

اختيار من متعدد

31 أعط كل الأجوبة الصحيحة

x_i	1	2	3	5	6
y_i	4	7	10	14	16

a) المستقيم (D_1) الذي معادلته $y = 2x + 4$ يشمل ثلاث نقط من السلسلة ز بالتالي (D_1) تعديل مناسب

b) المستقيم (D_2) الذي معادلته $y = 3x + 1$ يشمل ثلاث نقط من السلسلة و بالتالي (D_2) هو أحسن تعديل

c) مستقيم الانحدار (Δ) لـ y بدلالة x معادلته $Y = 2{,}36\,x + 2{,}17$ المعاملان مقربان الى $\frac{1}{100}$

32 بالرجوع إلى جدول التمرين السابق (33)

1) لتحديد أفضل تعديل لسحابة نقط وفق طريقة المربعات الدنيا لكل من المستقيمين (D_1) و (D_2) نحسب

$$S = \sum \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$$

2) من اجل المستقيم (D_1) الحدود الثلاثة الأخيرة في المجموع S معدومة .

3) من أجل المستقيم (Δ) كل الحدود في المجموع S هي معدومة .

4) المجموع S يأخذ نفس القيمة من أجل (D_1) و (D_2) .

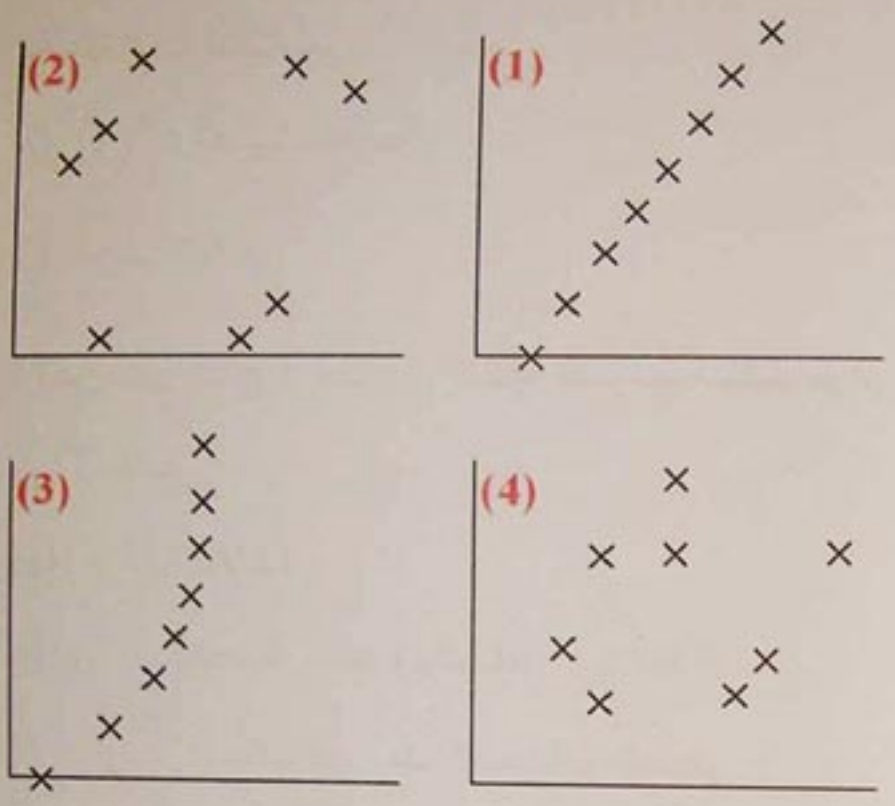
5) المجموع S يأخذ القيمة الدنيا له من أجل المستقيم (Δ)

6) $S = 5$ من أجل المستقيم (D_1) .

صحيح أم خاطئ

33 نعتبر السلاسل الخمسة مع سحابات النقط الأربعة

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	1	1	8	5	3	8	9	8
z_i	0	3	8	15	24	35	48	63
t_i	0	10	20	30	40	50	60	70
w_i	6,71	9,29	10,71	0,23	1,68	11,96	8,64	0,23



a) سحابة النقط $M_i(x_i ; w_i)$ هو (4)

b) سحابة النقط $N_i(x_i ; z_i)$ هو (2)

c) النقطة المتوسطة في السحابة (1) هي نقطة من السحابة

d) نقط السحابة (2) على استقامة واحدة

e) النقطة المتوسطة (2) على استقامة واحدة مع بقية نقط السحابة .

f) نقط السحابة (3) تنتمي إلى قطع مكافئ.

g) النقطة المتوسمة في للسلسلة $(x_i ; y_i)$ هي $\sigma_1(4{,}5;4)$

elbassair.net

10 الإحتمالات 10

الكفاءات المستهدفة

- تعيين قانون احتمال مرفق بتجربة عشوائية لها عدد منته من الإمكانيات .
- حساب احتمال حادثة علما حدوث حادثة أخرى و بناء شجرة متوازنة .
- قياس تلاؤم مع قانون منتظم .
- استعمال أشجار متوازنة أو دستور الاحتمالات الكلية لحساب احتمالات و حلّ مشكلات.
- التعرّف على حادثتين مستقلتين .
- حساب الامل الرياضياتي و التباين و الإنحراف المعياري المرفقة بقانون احتمال .
- تعريف قانون برنولي و قانون ثنائي الحد و استعمالهما لحساب احتمالات حوادث .

الإحتمالات وسيلة لاتخاذ القرار

ينتج مصنع (A) للأقراص المضغوطة 500.000 قرصا سنويا بهامش ربح يقدر بـ 10DA لكنه يعاني من مشكلة قلة نقط البيع . تقترح مؤسسة (B) للتسويق توفير نقط بيع للمصنع (A) شريطة طبع شعارها على الأقراص مع تحديد هامش الربح في نقط البيع الجديدة بـ 3DA فقط .
تردد المصنع (A) في قبول الإقتراح ، وبعد دراسة تبين له أنه في حالة قبوله تتراجع مبيعاته الأصلية بنسبة معينة و بالمقابل يبيع من النوع الذي يحمل شعار الشركة (B) ثلاثة أضعاف ما تراجع من مبيعاته الأصلية .
يوضح الجدول التالي نسب بالربح و الخسارة وفق ثلاث حالات بينتها الدراسة مع احتمالاتها .

الحالات	C1	C2	C3
خسارة A	-10%	-15%	-20%
ربح B	+30%	+45%	+60%

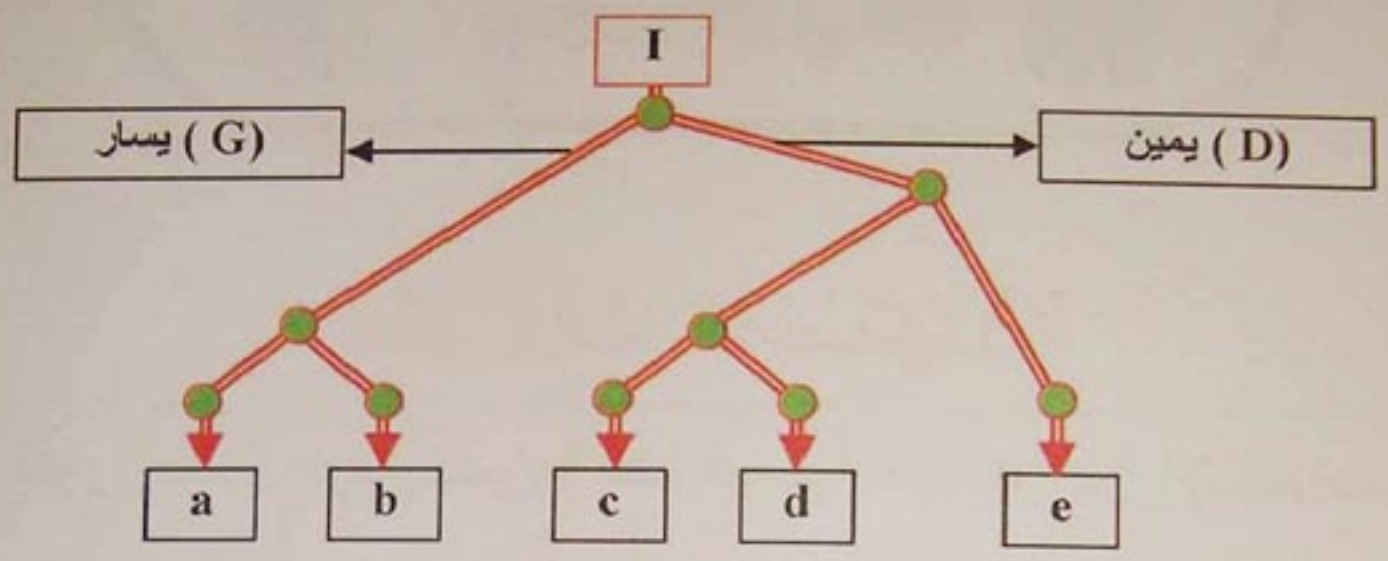
هل اقتراح (B) مفيد للمصنع (A) ؟
ماذا لو كان هامش الربح المقترح من قبل الشركة (B) هو 3,5DA ؟
(إرشادات في نهاية الفصل)

elbassair.net

النشاط الأول

(نملة تقرر الربح و الخسارة)

تتحرك نملة على المسلك الموضح أسفله



تنطلق النملة من الخانة I لتتحرك على طريق ما و تأخذ مسلكا .

نقبل أن في كل مفترق تأخذ النملة الأتجاه اليسار باحتمال $\frac{1}{3}$

1) ضع الشجرة المثقلة كنموذج لهذه التجربة العشوائية .

2) نقبل أن احتمال وصول النملة الى خانة ما هو جداء احتمالات المسالك الموصلة الى هذه الخانة

(مثلا احتمال وصول النملة الى الخانة a هو $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$)

استخدم الشجرة لحساب احتمالات الحوادث التالية (تعطى النتائج على شكل كسور غير قابلة للاختزال)

B " النملة تصل الى الخانة b " ، C " النملة تصل الى الخانة c "

D " النملة تصل الى الخانة d " E " النملة تصل الى الخانة e "

3) يراهن لاعب على مسار النملة، فهويربح 24 نقطة إذا وصلت الكرية الى a ، 8 نقاط إذا وصلت الى b ، 12 نقطة إذا وصلت الى c و لا يربح شيئا في حالة وصولها الى d بينما يخسر 16 نقطة إذا وصلت الى e .

نسمي X عدد النقط المحصل عليها .

- أكتب قانون احتمال X
- أحسب E(X) الأمل الرياضياتي لـــ X .
- هل اللعبة في مصلحة اللاعب ؟

4) يريد منظم اللعبة أن تكون اللعبة عادلة أي $E(X) = 0$ و عليه أراد أن يغير عدد النقط التي يخسرها اللاعب في حالة وصول الكريةالى الخانة e . ما هو العدد المناسب عندئذ ؟

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

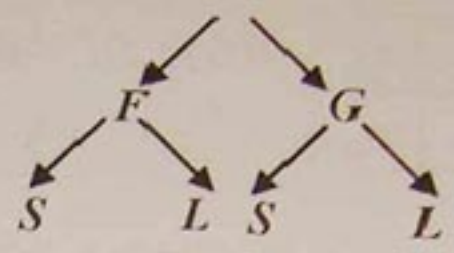
النشاط الثاني

أثناء دراسة على 35 تلميذا من القسم النهائي لشعبة التسيير و الاقتصاد ، تبين أن بعض التلاميذ لهم ملمح علمي في حين للآخرين ملمح أدبي

كما يبينه الجدول :

	ملمح علمي S	ملمح أدبي L	المجموع
الإناث F	45 %	55 %	57 %
الذكور G	73 %	27 %	43 %

(النسب مقربة الى الوحدة)



1) اكمل الشجرة بوضع النسب

2) ما هي نسبة التلاميذ الذين لهم ملمح علمي ؟ (بما فيهم الذكور و الإناث)

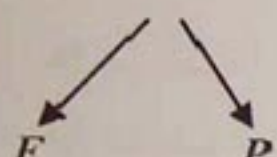
3) نختار عشوائيا أحد أفراد القسم . ما احتمال أن يكون :

a) بنتا ؟ b) ولدا و ذا ملمح علمي ؟

4) نختار عشوائيا تلميذا أدبي . ما احتمال أن يكون بنتا ؟

النشاط الثالث

نرمي قطعة نقود متوازنة و نسجل النتيجة المحصّل عليها (وجه F أو ظهر P)



1) ما احتمال الحصول على وجه ؟ أكمل الشجرة بوضع الاحتمال المناسب

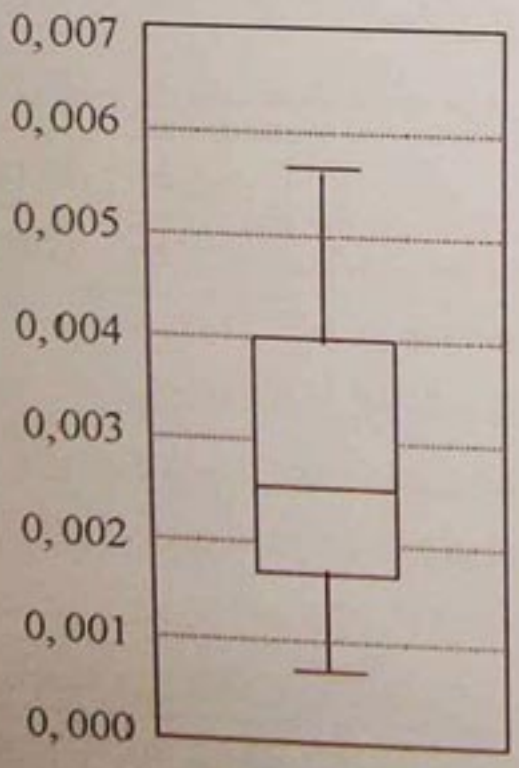
2) نرمي القطعة نفسها مرّة ثانية . أكمل الشجرة تبعا للرمية الأولى

3) نرمي القطعة مرة ثالثة .

a) عين كل المخارج على الشجرة b) ماهو عدد المخارج التي تحوي وجها مرّة واحدة فقط ؟

c) كيف نستعمل الشجرة لحساب احتمال الحصول على وجه مرّة واحدة ؟

النشاط الرابع



1) بواسطة مجدول أو حاسبة قم بمحاكاة سحب 200 رقم عشوائي من القائمة 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ثم أحسب التواترات f_1 ، f_2 ، ..... ، f_7 لكل عدد من القائمة .

2) صندوق يحوي 7 قريصات مرقمة من 1 الى 7 لا نميز بينها باللمس .

نسحب قريصة عشوائيا .

أكتب قانون الإحتمال ذي التوزيع المنتظم

على مجموعة المخارج $E=\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

- أحسب المجموع $d^2=\sum_{i=1}^{7}\left(f_i-\frac{1}{7}\right)^2$

3) قمنا بمحاكاة 30 سحب 200 رقم عشوائي محصور بين 1 و 7

و حسبنا في كل مرّة d^2 فحصلنا على 30 قيمة للعدد d^2 موزعة بالمخطط بالعلبة كما هو مبين في الشكل المقابل

- ما هو الربعي الثالث ؟ فسّر نتيجة المحاكاة .

elbassair.net

ـ الأمل الرياضياتي و التباين لقانون احتمال

عند القيام بتجربة عشوائية حصلنا على n نتيجة x_1 ، x_2 ، ..... ، x_n . كرّرنا التجربة عددا كبيرا من المرّات فكانت التواترات كما يلي :

x_i	x_1	.....	x_n
f_i	f_1	.....	f_n

تئول التواترات النظرية إلى احتمالات

x_i	x_1	.....	x_n
p_i	p_1	.....	p_n

p_1 ، p_2 ، ..... ، p_n حيث $0 \le p_i \le 1$

و $\sum_i P_i = 1$

و يكون معدل القيم الملاحظة هو μ حيث $\mu = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$

تعريف

- الأمل الرياضياتي لقانون احتمال هو المعدل μ حيث $\mu = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i$
- التباين لقانون احتمال هو العدد V حيث $V = \sum_{i=1}^{n} P_i (x_i - \mu)^2$ ، الانحراف المعياري هو $\sigma = \sqrt{V}$

ملاحظات : ① كما في الإحصاء يميز العدد V تشتت القيم حول المعدل μ

② يمكن حساب V بالدستور $V = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2 - \mu^2$

خواص : ❶ عند إضافة عدد ثابت a لكل القيم x_i يضاف a الى الأمل الرياضياتي .

❷ عند ضرب كل قيم x_i يضرب الأمل الرياضياتي في العدد a

مثال : يرمي اللاعب حجر نرد متوازن و يربح 10 دنانير إذا حصل على مضاعف للعدد 3 و يخسر 5 دنانير في الحالات الأخرى . لدينا

x_i	+10	-5
P_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$\mu = 10 \times \frac{1}{3} - 5 \times \frac{2}{3} = 0$

$V = \sum_{i=1}^{n} P_i x_i^2 - \mu^2 = 10^2 \times \frac{1}{3} + 5^2 \times \frac{2}{3} - 0 = 50$ و $\sigma = \sqrt{V} = 5\sqrt{2}$

2- التلاؤم مع قانون توزيع منتظم :

لمعرفة أن قطعة نقود ما متوازنة أو مزورة نرميها 100 مرّ متتابعة و نسجل التواترات التي كانت كما يلي

	وجه F	ظهر p
التواترات	0,482	0,518

لكننا نعلم أن قانون احتمال رمي قطعة نقود متوازنة هو

	وجه F	ظهر p
الاحتمال	0,5	0,5

نحسب المسافة بين قانون التوزيع المنتظم و التوزيع الملاحظ (أي عند رمي القطعة المختبرة)

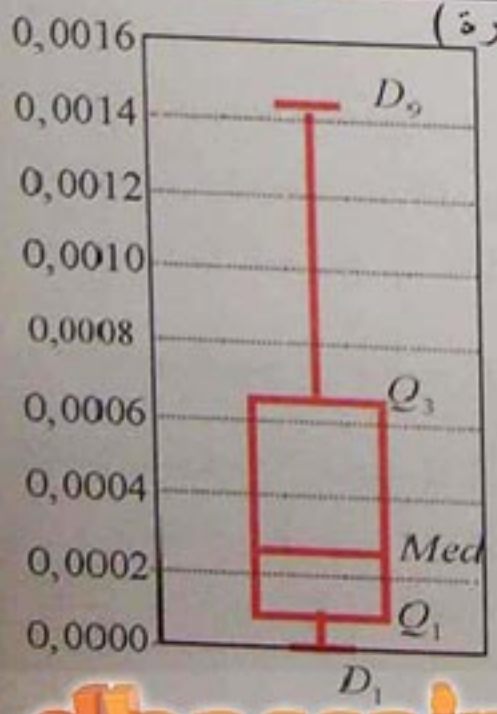
$d^2 = (0,518 - 0,5)^2 + (0,482 - 0,5)^2 = 0,00065$

نحاكي الآن 500 مرّة بواسطة مجدول 1000 رمية لقطعة متوازنة

و ليكن f_1 تواتر ظهور ظهر و f_2 تواتر ظهور وجه

و نحسب في كل مرّة d^2 حيث $d^2 = (f_1 - 0,5)^2 + (f_2 - 0,5)^2$

نحصل عندئذ على 500 قيمة للعدد d^2 موزعة بمخطط بالعلب كما هو موضح



مبرهنة : 90 % من قيم d^2 عند محاكاة قانون التوزيع المنتظم هي أصغر من D_9
إذا كانت القيمة d_0^2 أصغر من D_9 فأن القطعة متوازنة بمجازفة بالخطأ مقدارها 10 %

elbassair.net

موقع البصائر التعليمي

تمرين محلول 1 :

يدفع لاعبان A و B ، 6 و 10 دينارا على الترتيب و يرمي منظم اللعبة حجري نرد متوازنين كل منهما ذو أربعة أوجه مرقمة من 1 إلى 10 و يدفع للاعبين ضعف مجموع رقمي الوجهين الظاهرين بعد الرمي

- أحسب أمل الربح لكل لاعب .

الحل : عند رمي الحجرين مجموعة النتائج الممكنة هي $S=\{2,3,4,5,6,7,8\}$

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

باعتبار أن النتيجة هي مجموع الرقمين الظاهرين

يدفع اللاعب A ستة دنانير و يأخذ ضعف النتيجة و بالتالي قيم الربح هي $E'=\{-2,0,2,4,6,8,10\}$

قانون الاحتمال يعطى بالجدول التالي

x_i	-2	0	2	4	6	8	10
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

و $\sum_{i=1}^{7} p_i = 1$

الأمل الرياضياتي هو :

$$\mu=\frac{1}{16}\times(-2)+\frac{2}{16}\times(0)+\frac{3}{16}\times(2)+\frac{4}{16}\times(4)+\frac{3}{16}\times(6)+\frac{2}{16}\times(8)+\frac{1}{16}\times(10)=\frac{64}{16}=4$$

إذن أمل الربح بالنسبة للاعب A هو 4 دينارا .

لحساب أمل الربح للاعب B نطرح 4 من كل القيم x_i للاعب A و بالتالي أمل ربحه $\mu'=\mu-4=0$

بالنسبة للاعب B اللعبة عادلة (لا له و لا عليه)

تمرين محلول 2 :

يحوي صندوق 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5 لا نفرق بينها عند اللمس . نسحب على التوالي 3 كريات بالإرجاع (أي بعد كل سحبة نعيد الكرية إلى الصندوق) نسجل بالترتيب الأرقام التي تحملها الكريات المسحوبة لنحصل عندئذ على ثلاثة أرقام من بين 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5

1) ما هو عدد الأعداد الممكنة ؟

2) نعيد التجربة هذه المرّة لكن دون إرجاع الكرية المسحوبة . ما هو عدد الأعداد الممكنة ؟

- ما احتمال الحادثة A " الكرية الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4 "

الحل : 1) الأعداد المحصل عليها مشكلة من المئات و العشرات و الآحاد (هناك 5 إمكانيات بالنسبة لرقم المئات ، من أجل كل إمكانية هناك 5 إمكانيات لرقم العشرات أي 25 إمكانية و من أجل كل إمكانية للعشرات هنا 5 إمكانيات لرقم الآحاد) و بالتالي هناك $5\times5\times5=125$ عددا ممكنا

2) في الحالة الثانية هناك $5\times4\times3=60$ عددا (باعتبار أن الأرقام مختلفة مثنى مثنى ، الكرية المسحوبة لا ترجع)

- المخرج الذي يحقق الحادثة A يناسب وضع الرقم 4 رقما للعشرات فتبقى 4 إمكانيات لرقم المئات و لكل إمكانية تبقى 3 إمكانيات لرقم الآحاد أي $4\times3=12$ حالة ملائمة و بالتالي

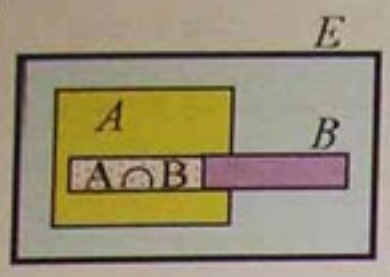
elbassair.net

الدرس

الاحتمالات الشرطية

1. تعريف

نعتبر تجربة عشوائية مجموعة مخارجها E و قانون احتمالها P



A و B حادثتان من E حيث احتمال A غير معدوم

يرمز لاحتمال الحادثة B علما أن A محققة بالرّمز $p_A(B)$ و يعرّف بالنسبة

$$p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}$$

ملاحظة : عند تساوي الاحتمال يكون لدينا

$$p_A(B)=\frac{\text{عدد عناصر المجموعة } A\cap B}{\text{عدد عناصر المجموعة } A}$$

ينتج من التعريف : $p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$

$$p(A\cap B)=p(B)\times p_B(A)$$

مثال: نرمي حجر نرد متوازن و نعتبر الحادثتين A "الحصول على رقم فردي" ، B "الحصول على مضاعف للعدد 3"

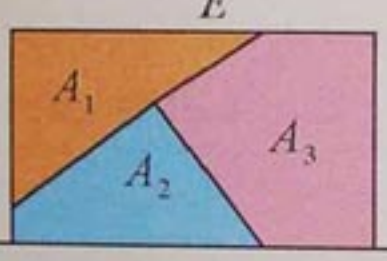
$A\cap B=\{3\}$ ، $B=\{3,6\}$ ، $A=\{1,2,3\}$ لأن $p_A(B)=\frac{p(A\cap B)}{p(A)}=\frac{1}{3}$

2. تعريف

نقول أن الحوادث A_1 ، A_2 ، ..... ، A_n تشكل تجزئة للمجموعة E عندما تكون هذه الحوادث غير متلائمة مثنى مثنى و اتحادها هو E و كلها ليست خالية

من أجل كل i و j من $[1;n]$ مع $i\neq j$ يكون $A_i\cap A_j=\varnothing$ ،

$A_1\cup A_2\cup.....\cup A_n=E$ و من أجل كل i يكون $A_i\neq\varnothing$

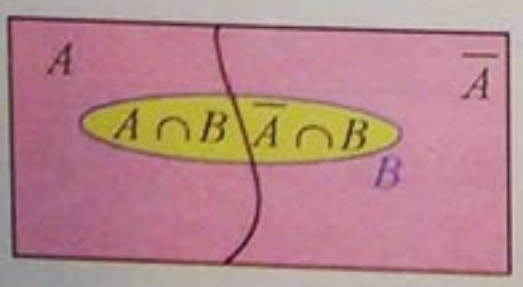


3. دستور الاحتمالات الكلية :

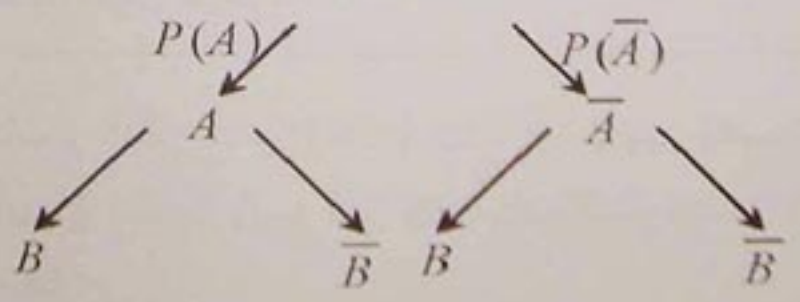
A حادثة احتمالها غير معدوم ، $\overline{A}$ حادثتها العكسية . A و $\overline{A}$ تشكل تجزئة لـ E

B حادثة من E . إذن الحادثتان $B\cap A$ و $B\cap\overline{A}$ غير متلائمتين و $(B\cap\overline{A})\cup(B\cap A)=B$

و بالتالي $p(B)=p(B\cap A)+p(B\cap\overline{A})=p_A(B)\times p(A)+p_{\overline{A}}(B)\times p(\overline{A})$.

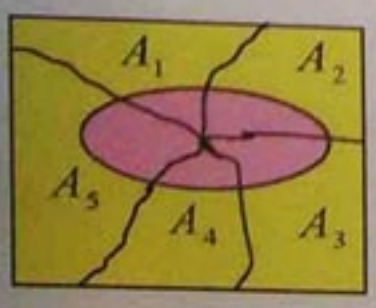


ثم تعمم هذه الحالة



مبرهنة : الحوادث A_1 ، A_2 ، .... ، A_n تشكل تجزئة لـ E . B حادثة من E

$$p(B)=p(A_1\cap B)+p(A_2\cap B)+....+p(A_n\cap B)$$
$$=p_{A_1}(B)\times p(A_1)+p_{A_2}(B)\times p(A_2)+...+p_{A_n}(B)\times p(A_n)$$



elbassair.net

تمرين محلول 1 :

تستقبل ثانوية L تلاميذ السنة الأولى من ثلاث متوسطات M1 ، M2 ، M3 .

25 % من التلاميذ يأتون من المتوسطة M1 ، 40 % من المتوسطة M2 و الباقي من المتوسطة M3

5 % من تلاميذ من المتوسطة M1 ، 10 % من تلاميذ M2 و 0,1 % من تلاميذ M3 يعيدون السنة .

نختار تلميذا عشوائيا .

a) كوّن شجرة متوازنة تترجم الوضعية .

b) احسب احتمال الحادثة A " التلميذ الذي تم اختياره يعيد السنة "

الحل

نرمز بالرمز A_i للحادثة " **التلميذ قادم من المتوسطة** M_i " مع $1 \le i \le 3$

و بالرمز B للحادثة " التلميذ يعيد السنة "

a) بما أن القانون ذو توزيع منتظم (تساوي احتمال) تترجم النسب الى الاحتمالات التالية

$$p(A_1)=0,40 \; ; \; p(A_2)=0,25 \; ; \; p(A_3)=1-p(A_1)-p(A_2)=0,35$$

➢ نشكل الشجرة المتوازنة

نضع على الفروع الأولى الاحتمالات السابقة

$$p(A_1)+p(A_2)+p(A_3)=1$$

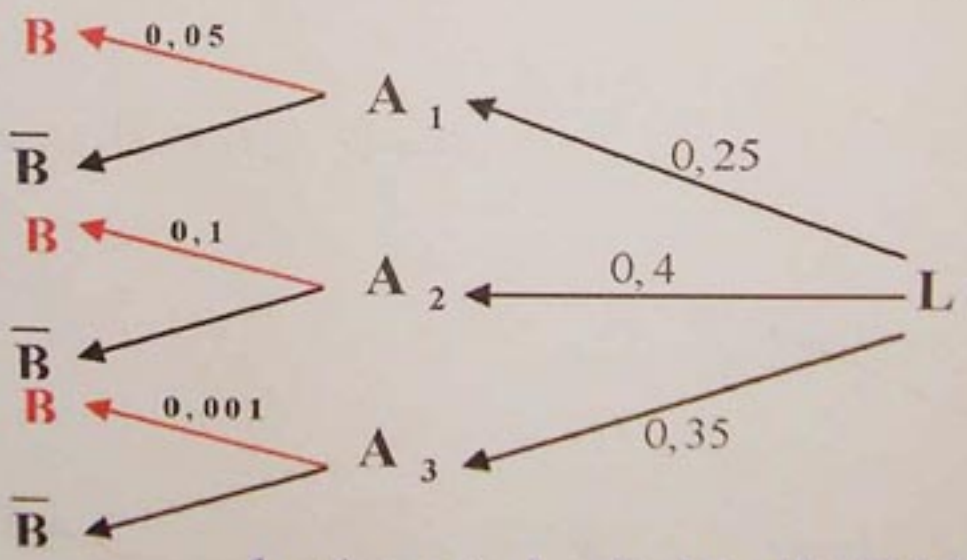
➢ تظهر في نص التمرين الاحتمالات الشرطية كما يلي :

احتمال أن يكون التلميذ معيدا إذا كان قادما من المتوسطة M1 هو 0,05

أي $p_{A_1}(B)=0,05$ و كذلك نقرأ $p_{A_2}(B)=0,1$ و $p_{A_3}(B)=0,001$

➢ نكمل الشجرة بفروع تتجه نحو B أو $\overline{B}$ ($\overline{B}$ الحادثة العكسية للحادثة B)

الفروع مثقلة بالاحتمالات الشرطية



لا تنس أن مجموع احتمالات الفروع في نفس المستوي يساوي 1

$p_{A_1}(B)+p_{A_1}(\overline{B})=1$ و كذلك $p(A_i \cap B)=p(A_i)\times p_{A_i}(B)$

b) نحسب $p(B)$ باستعمال دستور الاحتمالات الكلية

$$p(B)=p(A_1 \cap B)+p(A_2 \cap B)+p(A_3 \cap B)$$
$$=0,25\times 0,05+0,4\times 0,1+0,35\times 0,001=0,05285$$

elbassair.net

الحوادث المستقلة

1. تعريف E مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية قانون احتمالها P

A و B حادثتان احتمالاهما غير معدومين .

نقول أن A و B مستقلتان عندما يكون احتمال إحداهما مستقلا عن تحقق الأخرى

بعبارة أخرى $p_A(B) = p(B)$ أو $p_B(A) = p(A)$

أي أن استقلال A و B معناه أن احتمال " A و B " هو جداء احتماليهما

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

نقبل أنه إذا كانت A و B مستقلتين فإن $\overline{A}$ و B مستقلتان و كذلك A و $\overline{B}$ ، $\overline{A}$ و $\overline{B}$ أيضا

نلاحظ على الشجرة المتوازنة

$$p(B) = p_A(B) = p_{\overline{A}}(B)$$

و بالتالي $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$

$$= p(A) \times p(B)$$

و كذلك $p(\overline{A} \cap B) = p(\overline{A}) \times p_{\overline{A}}(B)$

$$= p(\overline{A}) \times p(B)$$

2. المبدأ الضربي :

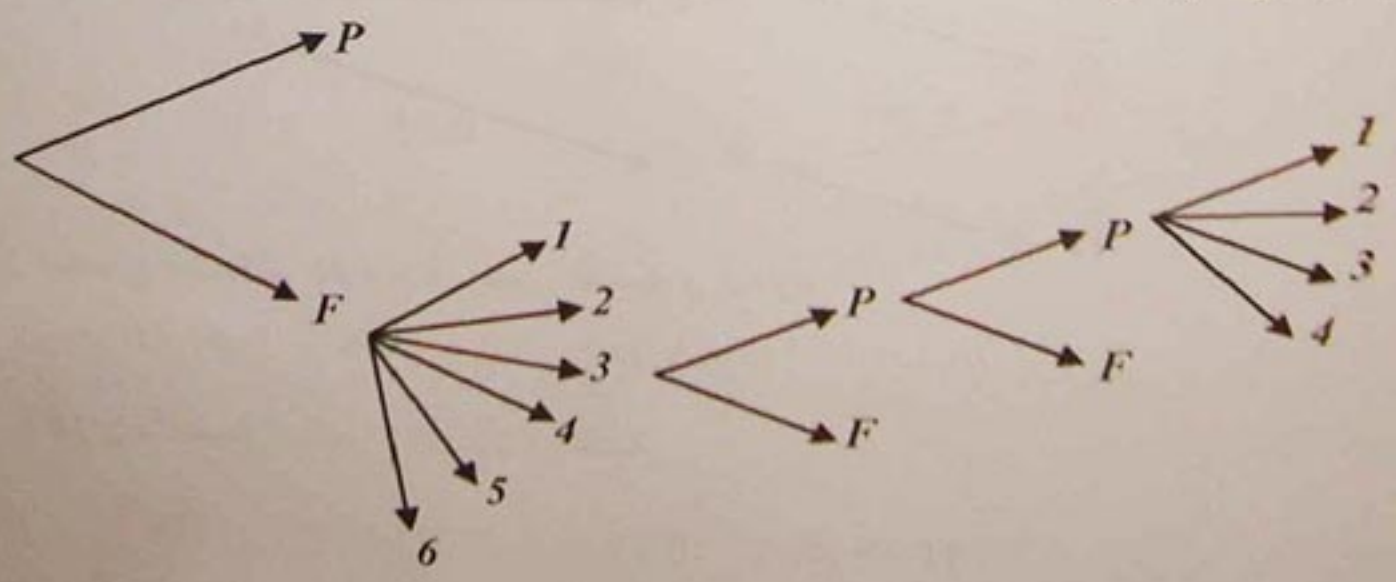
مبرهنة : في حالة تجارب مستقلة متتابعة ، احتمال قائمة نتائج هو جداء احتمالات كل النتائج الموجودة على القائمة

مثال : نرمي قطعة نقد ثم حجر نرد مكعب مرقم من 1 إلى 6 ثم قطعة نقد ثم قطعة نقد و أخيرا حجر نرد ذا أربعة أوجه مرقمة من 1 إلى 4 .

كل نتيجة لا تؤثر في التي تليها .

و عليه فاحتمال الحصول على القائمة $\{F, 2, P, P, 3\}$ مثلا

هو $\frac{1}{2} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{192}$



elbassair.net
موقع عيون البصائر التعليمي

تمرين محلول 1 : في مسابقة يجيب الطالب عن عددين من الأسئلة و يشار للجواب الصحيح بالعدد 1 و للخاطئ بالعدد 0 .

نعتبر الحادثتين A " ليس للأجوبة نفس الإشارة " ، B " جواب واحد على الأكثر ذو إشارة 0 "

1) إذا كان عدد الأسئلة اثنين ، هل A و B مستقلتان ؟

2) إذا كان عدد الأسئلة ثلاثة ، هل A و B مستقلتان ؟

الحل

1) مجموعة المخارج الممكنة هي : $E=\{(1,1);(1,0);(0,1);(0,0)\}$

نفرض أن القانون المعرف على E متساوي الاحتمال ، لدينا عندئذ

$p(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ ، $p(B)=\frac{3}{4}$ و منه $p(A)\times p(B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$

و لدينا $A\cap B=\{(1,0);(0,1)\}$ إذن $p(A\cap B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

و منه الحادثتان A و B غير مستقلتين

2) مجموعة النتائج هي $E=\{(1,1,1);(1,1,0);(1,0,1);(0,1,1);(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1);(0,0,0)\}$

$p(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$ ، $p(B)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

و منه $p(A)\times p(B)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

و لدينا $A\cap B=\{(0,1,1);(1,1,0);(1,0,1)\}$ إذن $p(A\cap B)=\frac{3}{8}$

و منه الحادثتان A و B مستقلتان

تمرين محلول 2 :

صنف مواطنو بلدية حسب الاحتياجات و الجنس كما يلي

	فقراء P	أغنياء R	متوسطون N	المجموع
ذكور M	0,5	0,2	0,3	90
إناث F	0,55	0,15	0,3	60
المجموع	52	53	45	150

تم اختيار أحد المواطنين عشوائيا

ليمثل البلدية في أحد المهرجانات

ما احتمال أن يكون ذكرا ذا حالة متوسطة ؟

الحل

احتمال الحادثة $A\cap B$ هو جداء الاحتمالين $p(A)$ و $p(B)$ في حالة استقلاليهما و إلا فهو جداء الاحتمالين $p(A)$ و $p_A(B)$ مثلا

لدينا $p_M(N)=0,3$ و $p(N)=\frac{45}{100}=0,3$ ، $p(N)=p_M(N)$ و هذا يعني أن M و N مستقلتان

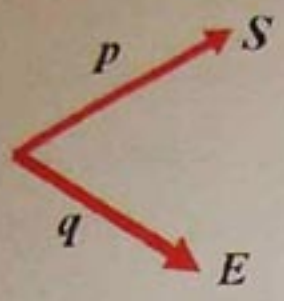
و بالتالي $p(M\cap N)=p(M)\times p(N)$

لكن $p(M)=\frac{90}{150}=0,60$ إذن $p(M\cap N)=0,6\times 0,3=0,18$

elbassair.net

الدرس

ـ قانون برنولي



1. تعريف ندما يكون للتجربة العشوائية مخرجان فقط (نجاح أو اخفاق)

نسميها تجربة برنولي

نرمز لاحتمال النجاح بالرمز p و لاحتمال الاخفاق بالرمز q ($p = 1 - q$)

ملاحظة : يمكن أن يكون النجاح غير مرغوب فيه و الاخفاق مرغوبا مأمولا

تعريف قانون برنولي بوسيط p هو إرفاق قانون احتمال متقطع للتجربة معرفة كما يلي

إذا رمزنا للنجاح بالعدد 1 و للاخفاق بالعدد 0 فإن الأمل الرياضياتي لقانون برنولي هو p و الإنحراف المعياري هو العدد $\sigma = \sqrt{pq}$

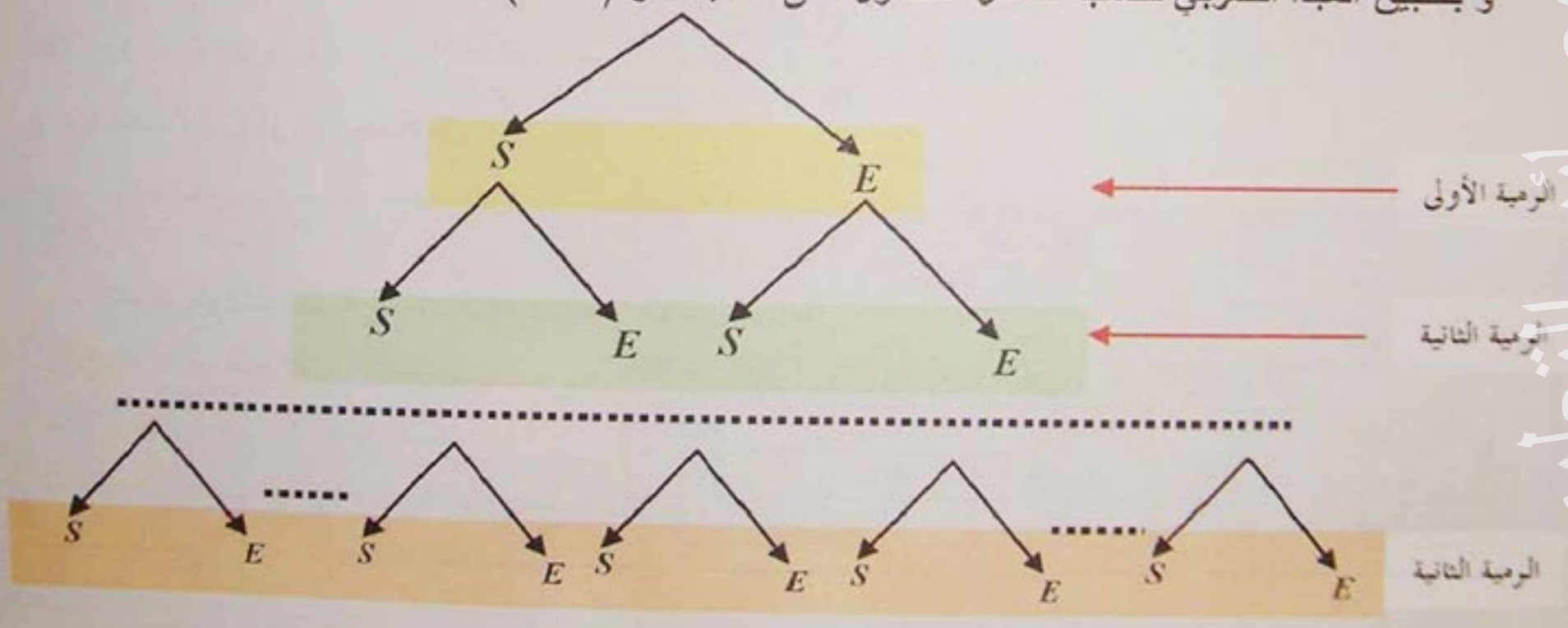
x_i	S	E
p_i	p	q

قانون ثنائي الحد :

عندما نكرر تجربة برنولي n مرّة (التجارب مستقلة) نهتم بعدد مرات لنجاح ضمن قائمة النتائج و في هذه الحالة يسمى قانون الاحتمال بقانون ثنائي الحد ذي الوسيطين n و p حيث p هو احتمال النجاح في تجربة برنولي و n عدد مرات تكرار تجربة برنولي .

يرمز لهذا القانون بالرمز $\beta(n;p)$.

و بتطبيق المبدأ الضربي نحسب احتمال الحصول على k نجاحا و (n-k) اخفاقا



احتمال الحصول على القائمة (S,S,S,....,S,E,E,....,E) " k نجاحا (S) و n-k إخفاقا (E) "

توجد قائمة وحيدة تحوي 0 نجاحا و قائمة وحيدة تحوي 0 إخفاقا . إذن احتمال الحصول على n إخفاقا هو $q^n = (1-p)^n$

من الشجرة يمكن استخلاص قانون الاحتمال

عدد مرات النجاح	0	1	2	.....	k	.....	n
الاحتمال p_i	q^n	$n_1 p^1 q^{n-1}$	$n_2 p^2 q^{n-2}$	.....	$n_k p^k q^{n-k}$	.....	p^n

n_k عدد القوائم التي تحوي k نجاحا .

elbassair.net

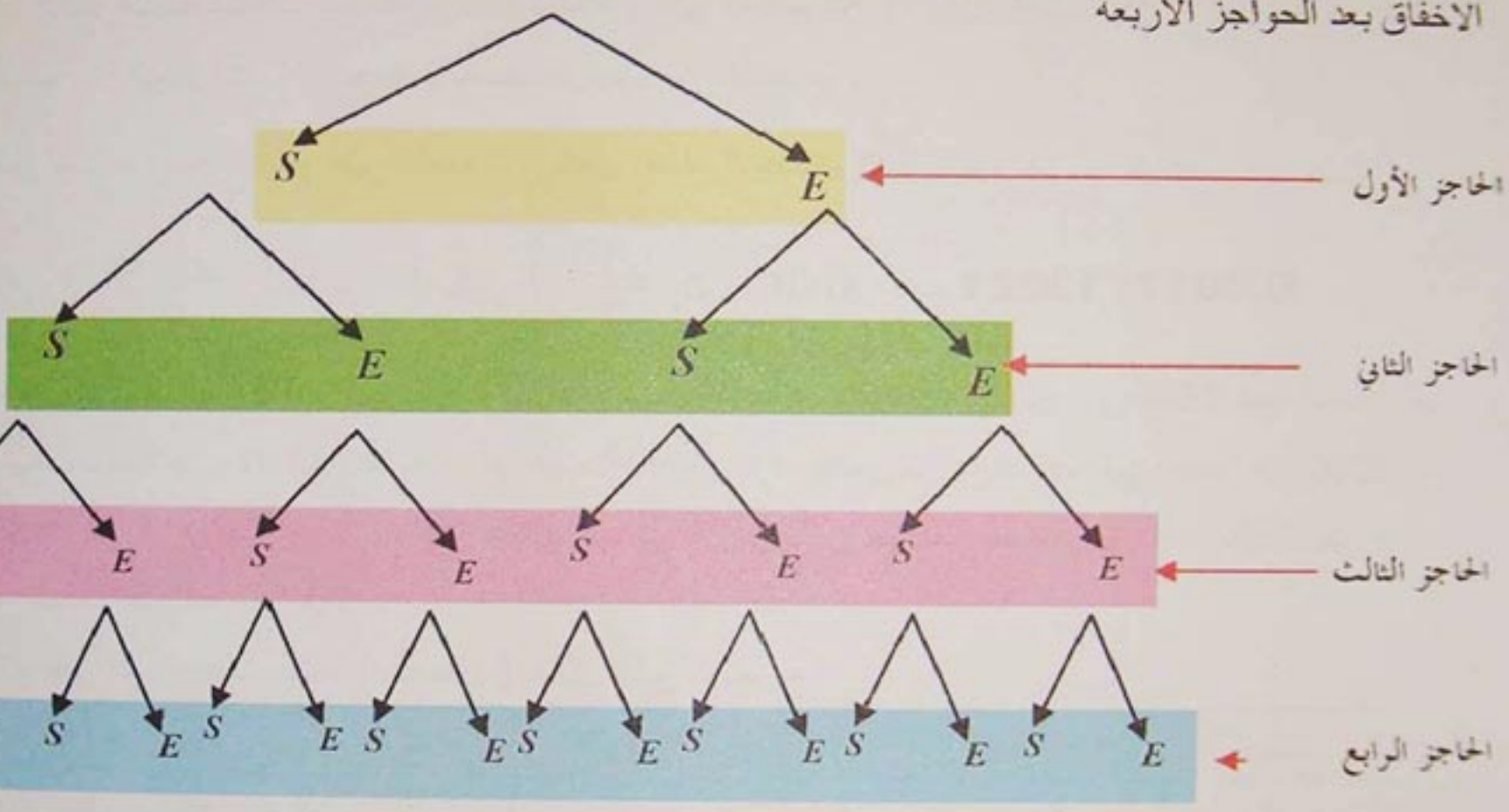
موقع عيون البصائر التعليمي

تمرين محلول: في ميدان الفروسية يجتاز متنافس 4 حواجز متتابعة . احتمال أن يجتاز حاجزا هو 0,4 .
نتائج اجتياز الحواجز مستقلة عن بعضها البعض . يخسر الفارس 10 نقط كلما أخفق .

1) ما هو احتمال أن يجتاز الفارس حاجزا واحدا فقط ؟
2) احسب احتمال أن يجتاز الفارس حاجزا واحدا على الأقل
3) ما هو قانون الاحتمال المرفق بخسارة النقط بالنسبة للفارس ؟
4) أحسب معدل الخسارة بعد الحواجز الأربعة

الحل

1) كل اجتياز لحاجز هو تجربة لبرنولي ، النجاح فيها S حيث S " الفارس يجتاز الحاجز " باحتمال 0,4
في كل حاجز احتمال النجاح لا يتغير و هو مستقل عن الحاجز السابق.
لدينا إذن 4 مرّات لتجربة برنولي (4 تجارب متطابقة و مستقلة) . ننشئ شجرة مثقلة (متوازنة) تمثل كل القوائم للنجاح و الاخفاق بعد الحواجز الأربعة



1) الحادثة A " الفارس يجتاز حاجزا واحدا فقط " يتكون من القوائم (E , E , E ,S) ، (E , E , S , E) ،
(E , S , E , E) ، (S , E , E , E) كل قائمة احتمالها هو $p \times q^3$ و بالتالي $p(A) = 4 \times 0,4 \times (0,6)^3 = 0,3456$
2) الحادثة B " الفارس يجتاز حاجزا واحد على الأقل " هي الحادثة العكسية للحادثة C " الفارس لا يجتاز أي حاجز "
C تناسب القائمة (E , E , E , E) أي $p(C) = q^4 = (0,6)^4$
و بالتالي $p(B) = 1 - (0,6)^4 = 0,8704$
3) قانون الاحتمال هو قانون ثنائي الحد بالوسيطين (4 ; 0,4)

عدد مرات النجاح	0	1	2	3	4
الاحتمال p_i	q^4	$4p^3q$	$6p^2q^2$	$4p\,q^3$	p^4

قانون الاحتمال المرفق بخسارة النقط بالنسبة للفارس هو

عدد مرات النجاح	40	30	20	10	0
الاحتمال p_i	0,0256	0,1536	0,3456	0,3456	0,1296

4) المعدل هو الأمل الرياضياتي و هو $\mu = 0,0256 \times 40 + 0,1536 \times 30 + 0,3456 \times 20 + 0,3456 \times 10 = 16$

elbassair.net

التلاؤم مع قانون توزيع منتظم
باستعمال حاسبة

مثال : قصد تحسيس مستعملي الطريق (**N7**) قام أمن الطرقات بدراسة تقارير حوادث المرور على الطريق المذكور خلال الأسبوع على مدار سنة كاملة

الجمعة	الخميس	الأربعاء	الثلاثاء	الإثنين	الأحد	السبت
159	125	125	125	124	157	147

نريد معرفة ما إذا كانت النتائج متلائمة مع قانون توزيع منتظم على المجموعة $E=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

1) ضع على القائمة L_2 التواترات f_i للحوادث حسب كل يوم من الأسبوع .

2) نفرض أن الحوادث موزعة بانتظام على الأسبوع ، يكون عندئذ الاحتمال **p** لكل يوم هو $p=\frac{1}{7}$

a) أحسب $d^2=\sum(f_i-p)^2$ باستعمال الدستور $SUM\left(\left(L_2-\frac{1}{7}\right)^2\right)$ نجد **0,0017113021**

b) باستعمال مجدول قمنا بمحاكاة **100** تجربة لـ **1000** سحبة لأعداد عشوائية فحصلنا على **100** قيمة للعدد d^2 عشري التاسع لهذه السلسلة هو $D_9=0,0016$ أي أن % 90 من d^2 لقانون توزيع منتظم هي أصغر من 0,0016 نجد هنا $d^2=0,0017$ (d^2 أكبر من D_9) و بالتالي نرفض الفرضية أن حوادث المرور موزعة بانتظام على أيام الأسبوع بمجازفة بالخطأ تقدر بـ **10 %** .

تطبيق : يدرس شخص عدد ساعات نومه (بالمعدل) خلال ليالي الأسبوع

الجمعة	الخميس	الأربعاء	الثلاثاء	الإثنين	الأحد	السبت
9	10	9	7	8	9	8

1) أحسب الاحتمال النظري p لكل ليلة على افتراض أن ساعات النوم موزعة بانتظام على ليالي الأسبوع

2) أحسب $d^2=\sum(f_i-p)^2$ حيث f_i هي التواترات المناسبة لليالي .

3) هل يمكن اعتبار أن ساعات نوم هذا الشخص موزعة بانتظام على ليالي الأسبوع ؟

1) عين تشفيرا للعبارة " **خمسة جويلية عيد الاستقلال** "

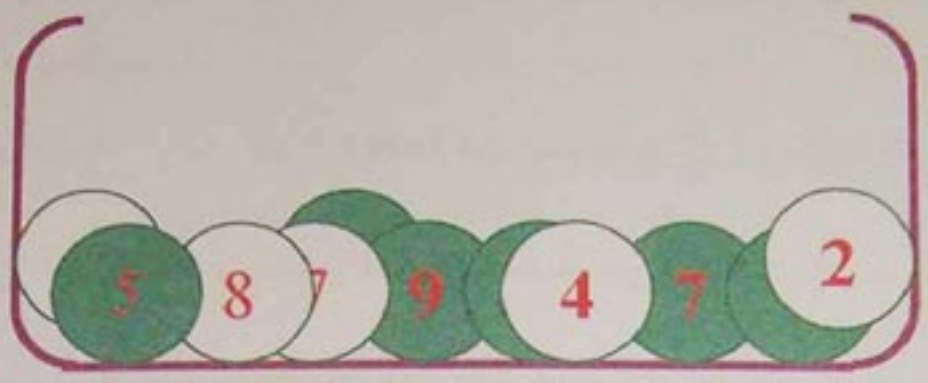
2) أثبت أنه: إذا كان x و x' عددين طبيعيين حيث $0\le x\le 27$ و $0\le x'\le 27$ و كان:
$7x+3\equiv 7x'+3[28]$ فإن $x=x'$.

4) ليكن التشفير التآلفي المعرف بـ : $y\equiv 4x+5[28]$ و $0\le y\le 27$ ، أذكر حرفين لهما نفس التشفير.

elbassair.net

2. الحالة العامة:

يحتوي صندوق على قريصات خضراء و قريصات بيضاء و أخرى حمراء (لا نمير بينها باللمس)



10 % من القريصات خضراء و عدد القريصات البيضاء 3 مرّات عدد القريصات الخضراء .

يسحب لاعب قريصة عشوائيا ، إذا كانت حمراء يأخذ ربحا قاعديا ، إذا كانت بيضاء يأخذ مربع الربح القاعدي و إذا كانت خضراء يخسر مكعب الربح القاعدي .

1) نفرض أن الربح القاعدي هو 20 دينارا

a) أكتب قانون الاحتمال للنتائج الممكنة .

b) أحسب الربح المتوسط المأمول بعد عدد كبير من السحبات .

2) نريد تعيين g_0 قيمة الربح القاعدي حتى يكون أمل الربح أكبر ما يمكن .

تعطى النتيجة بالدينار

ليكن X الربح القاعدي بالدينار .

a) بين أن المسألة تئول إلى دراسة النهايات الدية للدالة f على المجال $[0;+\infty[$ حيث

$$f(x)=-0,1x^3+0,3x^2+0,6x$$

b) أدرس اتجاه تغيرات f على المجال $[0;+\infty[$ ، استنتج حلا للمسألة السابقة

elbassair.net

موضوع محلول

يعرض متجر تخفيضات هامة أثناء بيع جزء من مدخراته لقطع الغيار التي تشتمل ثلاثة أنواع A ، B ، C . تمثل السلعة A ربع المدخرات بينما تمثل B ثلثها و تمثل C الباقي .

40 % من السلعة A و 75 % من السلعة B و 24 % من السلعة C كلها مخفضة الأثمان .

أخذ زبون قطعة عشوائيا . لتكن الحوادث التالية

S " القطعة التي أخذها الزبون مخفضة " ، A " القطعة من السلعة A " و كذلك B و C

1) أ) باستعمال الشجرة المتوازنة بين أن احتمال أن تكون قطعة مخفضة هو $p = 0,45$

ب) استنتج احتمال أن تكون قطعة من السلعة B علما أنها مخفضة .

2) نأخذ 3 قطع عشوائيا بطرق مستقلة ، أحسب احتمال أن تكون قطعة واحدة فقط مخفضة .

3) أ) أحسب بدلالة n الاحتمال p_n حتى يكون قطعة واحدة على الأقل نخفضة من بين n قطعة مختارة عشوائيا

ب) عين أصغر قيمة لـ n حتى تكون p_n أكبر من 0,9999 .

حل مختصر	تعاليق
1) أ) $p(S) = p_A(S)\times p(A) + p_B(S)\times p(B) + p_C(S)\times p(C) \simeq 0,45$ ب) $p_S(B) = \dfrac{p(B\cap S)}{p(S)} = \dfrac{\frac{1}{3}\times 0,75}{0,45} \simeq 0,55$ 2) نعتبر الحادثة R " قطعة واحدة فقط مخفضة " $p(R) = 3(0,45)(0,55)^2 = 0,41$ 3) أ) $p_n = 1-0,55^n$ ب) $n = 20$	نكوّن الشجرة المثقلة اعتمادا على النسب المئوية المعطاة الاحتمال المطلوب هو جداء الاحتمالات الموجودة على المسارات الموصلة الى S (و هي ثلاثة مسارات) استعمل شجرة استعمل الحادثة العكسية حل المتراجحة $p_n > 0,9999$

موقع عيون الإنصاف التعليمي

elbassair.net

استعد للباكالوريا

موضوع مع إرشادات

في ثانوية لا تستقبل التلاميذ الداخلين يتوزع التلاميذ الذين عددهم 895 كما يلي

المستوى	الأولى ثانوي	الثانية ثانوي	النهائي	المجموع
خارجيون	50		85	195
نصف داخلي	285	220		
المجموع			280	

1) أكمل الجدول السابق

2) لقي المدير تلميذا A صدفة . لتكن الحوادث التالية

E " التلميذ A خارجي " ، S " التلميذ من مستوى الأولى ثانوي " ، T " التلميذ A من مستوى النهائي "

نفرض أن كل التلاميذ لهم نفس الاحتمال للقاء المدير.

أحسب الاحتمالات التالية (بتدوير 10^{-2})

أ) $p(E \cap S)$ ب) $p(\overline{E} \cap T)$

3) أ) هل الحادثتان E و T مستقلتان ؟ علل .

ب) اذكر حادثتين غير متلائمتين

4) أحسب الاحتمالات الشرطية التالية

أ) $p_S(\overline{E})$ ب) $p_E(T)$

الإرشادات

1) يمكنك البداية بحساب مجموع تلاميذ السنة الأولى ثم مجموع تلاميذ السنة الثانية

2) هل تذكر كيفية تدوير عدد ؟ إرجع إذن لدرس السنة الأولى ثانوي .

3) أ) نقول عن حادثتين أنهما مستقلتان إذا وفقط إذا كان

جداء إحتماليهما يساوي احتمال وقوعهما معا

ب) A و B حادثتان غير متلائمتين معناه $A \cap B = \varnothing$

4) تذكر دوما أن $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$

إرشادات في مسألة اتخاذ القرار

- احسب في كل حالة عدد الأقراص المباعة من النوع الأصلي و بشعار الشركة ثم استنتج الربح .
- أحسب متوسط الربح باستعمال الاحتمالات المرفقة (الأمل الرياضياتي) .
- قارن النتيجة بالمبلغ 5.000.000DA ثم اصدر القرار المناسب .
- بإتباع نفس الخطوات ولكن بهامش ربح 3,5DA قارن مجددا ثم أشر على إدارة المصنع .

elbassair.net

تمارين

تمارين تطبيقية

1 - الإحتمال و قانون الإحتمال

1 نعتبر المجموعة $E= \{0;1;2;3;4;5;6;7\}$ باستعمال عنصرين x و y من E نصنع حجرة دومينو عادية | x | y | أو | y | x | و بعنصر واحد z نصنع حجرا مضاعفا | z | z |

1) بين انه يمكن بهذه الكيفية صناعة 36 حجرا .

2) نأخذ عشوائيا حجرا واحدا

أ) ما احتمال أن يكون الحجر مشكلا بأرقام زوجية ؟

ب) ما احتمال أن يكون مجموع رقمي الحجر زوجي ؟

ج) نأخذ حجرين في آن واحد .

أكد أحد اللاعبين " إحتمالا لحصول على حجر مضاعف و حجر عادي أحد رقميه هو رقم الحجر المضاعف هو $\frac{4}{45}$ "

هل هذا التأكيد صحيح ؟ علّل .

2 يضع أحمد في جيبه قطعة نقود بقيمة 100DA و 3 قطع بقيمة 50DA و 5 قطع بقيمة 20DA .

سحب أحمد قطعتين عشوائيا على التوالي دون إرجاع من جيبه . نعتبر X قيمة القطع الثلاثة المسحوبة

1) حدد قيم X الممكنة

2) عرّف قانون احتمال X

3) أحسب الأمل الرياضياتي و التباين .

4) إذا سحب أحد 3 قطع على التوالي دون إرجاع . أعد الإجابة على الأسئلة السابقة في الظروف الحالية .

3 نرمي حجر نرد عادية مرتين متتابعتين . ما احتمال الحصول على :

1) رقمين فرديين ؟

2) عددين مجموعهما فردي ؟

3) عددين جداؤهما زوجي ؟

4) نعتبر X مجموع الرقمين المحصل عليهما

أ) حدد قيم X الممكنة

ب) عرّف قانون إحتمال X و أحسب E(X)

ج) أحسب $p(X>6)$ و $p(X=12)$

4 نرمي قطعة نقود متوازنة 6 مرات متتابعة .

ما احتمال أن يكون عدد مرات ظهور الوجه :

1) يساوي عدد مرات ظهور الظهر ؟

2) أكبر من عدد مرات ظهور الظهر ؟

3) مضاعف لعدد مرات ظهور الظهر ؟

5 نضع بين يدي طفل ثلاثة أقلام ملونة أخضر ، أحمر و أصفر و نطلب منه تلوين الأوجه الستة لعلبة مكعبة الشكل . 1) ما عدد الكيفيات الممكنة للتلوين ؟

2) ما احتمال الحصول على مكعب على الأقل فيه وجه أحمر ؟

6 يضم صندوق A كرتين سوداوين و ثلاث كرات بيضاء و يضم الصندوق B كرتين بيضاوين و ثلاث كرات سوداء .

1) نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق A .

ما احتمال أن تكون بيضاء ؟

2) نعيدها الكرة المسحوبة إلى الصندوق B .

a) ما احتمال أن يكون عدد الكرات البيضاء يساوي عدد الكرات السوداء ؟

b) ما احتمال أن يكون عدد الكرات البيضاء ضعف عدد الكرات السوداء ؟

7 يشارك فريد في لعبة حظ حيث احتمال الفشل فيها 0,65 . قرر فريد المحاولة 3 مرات متتابعة (نعتبر أن المحاولات مستقلة عن بعضها البعض) . نعتبر X عدد مرات الفوز في المحاولات الثلاثة.

1) ما هو احتمال الحادثتين :

A " دوما يفشل في المحاولات الثلاثة "

B " يفوز مرة واحدة على الأقل في المحاولات الثلاثة "

2) عرف قانون الاحتمال لـــ X

3) أوجد الأمل الرياضياتي و التباين لـــ X

8 يضم صندوق 3 قريصات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 . و ثلاث قريصات حمراء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 . نسحب عشوائيا قريصة واحدة من الصندوق ، ليكن X العدد الحقيقي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء ضمن السحبة . وليكن Y العدد الحقيقي الذي يساوي رقم القريصة المسحوبة .

elbassair.net

1) عرف قانوني الإحتمال لكل من X و Y

2) أحسب الامل الرياضياتي لكل من X و Y

3) إذا اعتبرنا الامر يتعلق بلعبتين . فأيهما مربحة بالنسبة للاعب ؟

9 49 كرية مرقمة من 1 الى 49 ، منها 6 كريات حمراء و الباقي بيضاء . نسحب على التوالي دون ارجاع 6 كريات

1.ما عدد الطرق الكلية ؟

2.ما احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء و3 كريات حمراء ؟

3.ما احتمال الحصول على 6 كريات حمراء ؟

4.ما احتمال الحصول على 5 كريات حمراء ؟

5.ما احتمال الحصول على 4 كريات حمراء ؟

10 يتكون قسم من مختلط من 18 تلميذا و 12 تلميذة . يراد تشكيل لجنة للقسم تضم رئيسا و نائبا و أمينا (الترتيب مهم)

1) ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها ؟

2) ماهو احتمال تشكيل لجنة بحيث :

أ) يكون الأمين تلميذة ؟

ب) التلميذ X موجودا في اللجنة ؟

ج) يكون الرئيس تلميذا و الأمين تلميذة ؟

د) الرئيس و نائبه من جنسين مختلفين ؟

3) نفرض أن الرئيس تلميذا والأمين تلميذة وأن التلميذ X لا يريد الإنضمام الى لجنة تضم التلميذة Y .

- ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها في هذه الظروف ؟

11 الجدول التالي يعرف قانون احتمال لتجربة عشوائية

α	$1-$	2	3	4
$P(X=\alpha)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	a

1) حدد قيمة العدد الحقيقي a

2)أحسب $P(X=2)$ و $P(X\geq\frac{5}{2})$ و $P(X<1)$

3) $P(X^2-6X+8<0)$

12 يحوي كيس 3 كريات تحمل الرقم 10 و 3 كريات تحمل الرقم 15 .

نسحب عشوائيا و في آن واحد كريتين و ليكن X العدد الحقيقي الذي يساوي مجموع الرقمين المحصل عليهما .

1) حدد مجموعة النتائج الممكنة .

2) حدد مجموعة القيم الممكنة لـ X .

3) عرف قانون الإحتمال لـ X

4) أحسب الامل الرياضياتي $E(X)$

5) أحسب التباين $V(X)$

6) أوجد $P(X\geq 25)$

13 يحوي صندوق 3 قريصات بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 و ثلاث قريصات سوداء تحمل الأرقام 1 ، 2 ، 3 أيضا . نسحب عشوائيا قريصة واحدة من الصندوق و نعتبر العدد X الذي يساوي (+1) إذا كانت القريصة بيضاء و صفر إذا كانت القريصة سوداء ، و نعتبر أيضا العدد Y الذي يساوي الرقم الذي تحمله القريصة المسحوبة.

1) عرّف قانون الإحتمال لكل من X و Y

2) أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$ و $E(Y)$

3) في حالة كونهما لعبتين . أيهما مربحة للاعب ؟

14 يحوي كيس أربع قريصات تحمل الأرقام 1،2،3، a ($a\in\mathbb{N}$) . نسحب قريصة واحدة و نعتبر P_k هو احتمال سحب القريصة ذات الرقم k

1) أحسب الأعداد الحقيقية P_1 ، P_2 ، P_3 ، P_a إذا علمت أنها بهذا الترتيب تشكل حدود متتابعة من متتالية حسابية أساسها $\frac{1}{18}$.

2) ليكن F العدد الحقيقي الذي يساوي الرقم الذي تحمله كل قريصة مسحوبة . أوجد قيمة العدد a إذا علمت أن الامل الرياضياتي هو $\frac{43}{9}$.

15 يحتوي كيس على 20 كرة مرقمة من 1 الى 20 لا نفرق بينها عند اللمس .

1- نسحب كرة من الكيس ، ما هو إحتمال الحصول على :

elbassair.net

أ- كرة تحمل عددا مضاعفا للعدد 4 ؟

ب- كرة تحمل عددا ليس من مضاعفات 5 ؟

2- نسحب في هذه المرة كرتين على التوالي دون ارجاع ، ما هو إحتمال الحصول على :

أ- كرتين تحملان عددين مضاعفين للعدد 4 ؟

ب- كرتين إحداهما تحمل عددا مضاعفا للعدد 3 و الثانية تحمل عددا مضاعفا للعدد 4 ؟

3- نسحب الآن 3 كرات على التوالي دون ارجاع ما هو إحتمال الحصول على :

أ- ثلاث كرات تحمل أعددا مضاعفة للعدد 4 ؟

ب- ثلاث كرات مجموع أرقامها زوجي ؟

16 نرمي زهرة نرد رمية واحدة و نعتبر اللعبة التالية

يخسر اللاعب العدد 20DA إذا ظهر الرقم 1

يربح اللاعب 10DA إذا ظهرت الأرقام 2 ، 4 ، 6

في الحالات الأخرى لا ربح و ال خسارة

1) حدد مجموعة المخارج ثم مجموعة القيم

2) إذا كان زهرة النرد عادية نعتبر X المبلغ الذي يترتب عن هذه اللعبة . عرّف قانون الاحتمال للمبلغ X

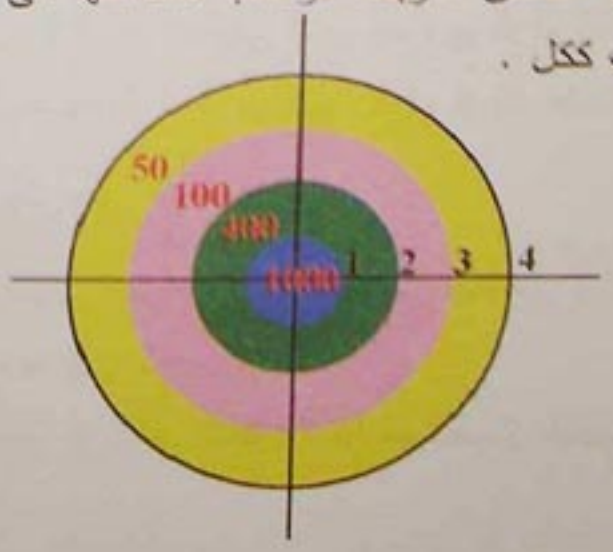
3) هل هذه اللعبة عدالة ؟ إذا كان الجواب بالنفي فاقترح تعديلا على مبلغ الربح أو مبلغ الخسارة حتى تصبح اللعبة عادلة .

4) نفرض أن زهرة النرد غير متوازنة بحيث احتمال ظهور الأوجه 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 هو 0,12 .

- عرّف قانون الاحتمال لـــ X في هذه الحالة

17 هدف و مساحة :

رامي قوس بارع دوما يصيب الهدف لكن إحتمال إصابة أية منطقة من المناطق الأربعة هو نسبة مساحتها الى مساحة الهدف ككل .



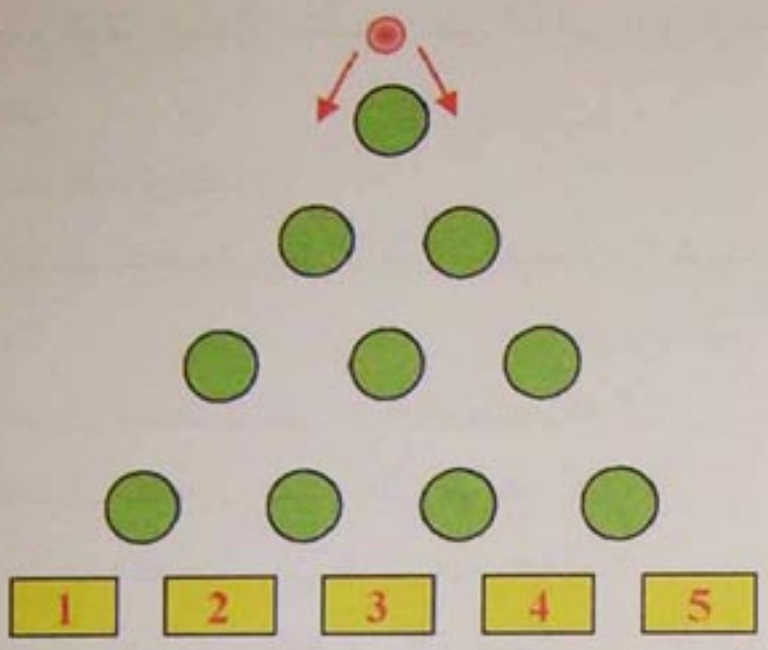
ليكن X العلامة النهائية المترتبة عن تسديد سهم واحد

1) حدد القيم الممكنة لـــ X

2) عرّف قانون الإحتمال لـــ X

3) أحسب الأمل الرياضياتي و الإنجراف المعياري

18 يمين أم شمال :



تمي الكرة الحمراء من أعلى الهرم و عند كل حاجز احتمال أن تسلك على اليمين يساوي احتمال أن تسلك على الشمال (البسار) ليكن X رقم الخانة التي تستقر فيها الكرة الحمراء

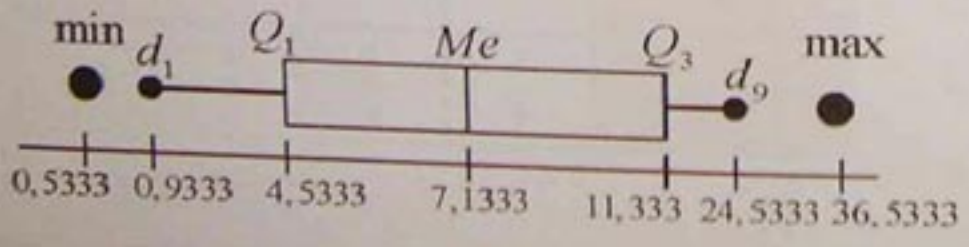
- عرّف قانون الإحتمال للعدد X

2 - التلاؤم مع قانون توزيع منتظم

18 للتحقق من مصداقية حجر نرد ، قمنا برميه 100 مرّة متتابعة و إليك النتائج:

الوجه	1	2	3	4	5	6
مرات الظهور	23	18	21	8	19	11

نجري بجهاز الحاسوب 2000 سلسلة لـــ 100 رمية لحجر النرد نتجت 2000 قيمة لـــ d^2 . قمنا بتلخيص على مخطط بالعلب توزيع قيم d^2 1000



- هل يمكن التأكيد بمجازفة بالخطأ مقدارها 10% أن حجر النرد غير مزيف ؟

elbassair.net
موقع البساير التعليمي

20 القطع النقدية المزيفة بقيمة 100DA

يملك أحمد 5 قطع نقدية من نوع 100 DA . خطرت له فكرة " التحقق من مصداقية القطع " فهتدى الى فكرة رائعة . قام برمي كل قطعة نقدية 100 مرّة وسجل النتائج فكان الجدول التالي

رقم القطعة	1	2	3	4	5
مرات ظهور الظهر	37	54	41	39	58
مرات ظهور الوجه	63	46	59	61	42

1) باعتبار مستوى الثقة 90 % ، ماهي القطعة التي سيعتبرها أحمد مزيفة ؟

2) نفس السؤال السابق من أجل مستوى ثقة 95 % ؟

3) نفس السؤال السابق من أجل مستوى ثقة 99 % ؟

المحاكاة : نجري بالحاسوب 1000 عملية بـــ 100 رقم محصور بين 1 و 5 ، تعطي 1000 قيمة لـــ d^2 .

العشري التاسع للمحاكاة هو 0,0154

21 كتبت لبنى أعداد طبيعية أصغر تماما من 10 على ورقة. وهذه هي أعداد لبنى

3 ، 4 ، 2 ، 4 ، 7 ، 1 ، 1 ، 2 ، 6 ، 9 ، 8 ، 8 ، 7 ،
1 ، 1 ، 9 ، 5 ، 7 ، 3 ، 8 ، 6 ، 9 ، 6 ، 5 ، 4 ، 3 ،
2 ، 1 ، 8 ، 7 ، 6 ، 7 ، 2 ، 8 ، 5 ، 9 ، 3 ، 8 ، 2 ،
2 ، 7 ، 6 ، 5 ، 3 ، 1 ، 1 ، 8 ، 9 ، 7 ، 9 .

1) لخص هذه المعطيات في جدول من عمودين

2) أحسب الوسط الحسابي ، التباين و الانحراف المعياري

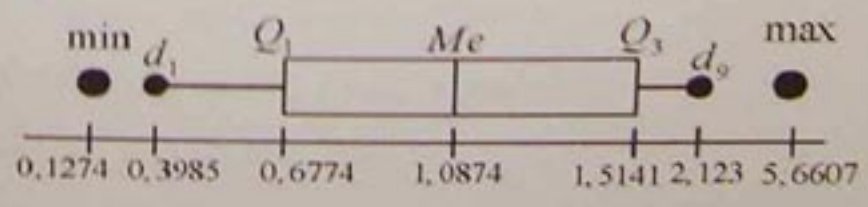
3) أحسب الوسيط و الربعيين

4) أنشئ مخططا بالعلب لهذه السلسلة

5) نتساءل عن مدى انسجام أعداد لبنى المكتوبة بطريقة عشوائية . من أجل هذا نقترح حساب d^2

6) باستعمال الحاسوب أجرينا 1000 عملية لاختيار 50 رقما محصورا بين 1 و 9 حصلنا على 100 نتيجة لـــ d^2 قمنا بتلخيص توزيع قيم d^2 100 على مخطط بالعلب

نتج:



هل يمكن التأكيد بمجازفة بالخطأ مقدارها 10% أن للبنى تلقائية في انسجام العشوائية لديها (أرقامها العشوائية منسجمة دوما) ؟

22 يتناوب عمر وخالد على تسيير مكتبة عامة تضم آلاف العناوين من الكتب و لها مئات المنخرطين . عمر يشرف عليها من يوم السبت الى الإثنين و خالد يشرف عليها يومي الثلاثاء و الأربعاء . لاحظ عمر و خالد وجود مشكلة اختفاء بعض العناوين من مكتبتهما ، تتبعا الأمر خلال أسبوع فتحصلا على الجدول التالي

يوم	السبت	الأحد	الإثنين	الثلاثاء	الأربعاء
X	16	13	16	27	28

X يمثل عدد العناوين المختفية في كل يوم .

1) هل يمكننا القول بمجازفة بالخطأ مقدارها 10% أن نهايةا أسبوع لها تأثير على عدد العناوين المختفية ؟

معطيات : نحاكي 1000 مرّة 100 رقم عشوائي محصور بين 1 و 5 تعطي 1000 قيمة لـــ d^2 . العشري التاسع هو 0,0154

23 لعبة الكرة والثقوب :

في لعبة ، نرمي كرة لتدور حول 9 ثقوب متماثلة مرقمة من 1 الى 9 ثم تستقرفي أحدها .

شك سعد في مصداقية الكرة فقام بتسجيل 100 نتيجة

3	5	4	4	1	7	2	3	5	2
5	6	4	6	2	3	9	1	4	5
6	7	7	8	6	7	7	3	3	1
7	1	1	8	5	3	6	5	7	8
9	5	3	1	9	4	6	3	8	3
4	6	8	4	9	5	2	1	1	9
3	9	9	1	3	6	6	9	9	7
7	5	9	5	2	3	3	4	6	5
5	2	2	5	4	2	4	5	9	6
7	8	4	7	5	7	3	3	8	5

1) نظم هذه النتائج في جدول (تواترات كل ثقب)

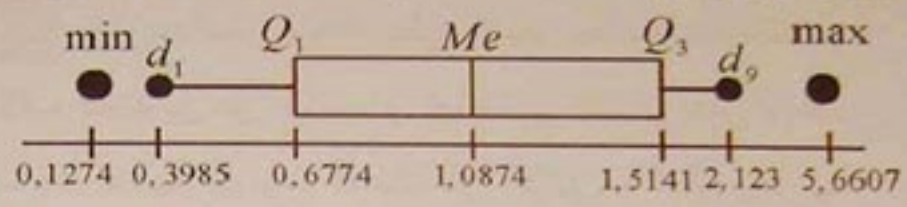
2) أحسب d^2

3) هل يمكن لسعد أن يؤكد بمجازفة بالخطأ مقدارها 10% أن الكرة مغشوشة ؟

elbassair.net

- نحاكي 1000 مرّة 50 رقم عشوائي محصور بين 1 و 9 على جهاز الحاسوب تعطي 1000 قيمة لـ d^2 .

تلخيص توزيع قيم 100 d^2 على مخطط بالعلب أعطى :



3 - الإحتمال الشرطي و الحوادث المستقلة

24 يضم صندوق 10 قريصات مرقمة من 1 الى 10 .
نسحب قريصتين على التوالي مع الإرجاع .
1) أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4 .
2) أحسب احتمال الحصول على رقمين فرقهما 4 علما أن مجموعهما 10 .

25 في مدينة ما ، 55 % من السكان مدخنون و 45 % منهم مدمنون على شرب القهوة و 30 % مدخنون و مدمنون على شرب القهمو . نأخذ عشوائيا رجلا واحدا من هذه المدينة :
1) إذا كان هذا الرجل مدخنا ، ما إحتمال أن يكون مدمنا على شرب القهوة أيضا ؟
2) إذا كان هذا الرجل مدمنا على شرب القهوة ماإحتمال أن يكون مدخنا أيضا ؟
3) ما إحتمال أن يكون مدخنا أو مدمن على شرب القهوة ؟

26 يضم صندوق ثلاث قطع نقدية . قطعة عادية (تحمل وجه وظهر) و قطعة تحمل وجهين و القطعة الثالثة مغشوشة بحيث إحتمال ظهور الوجه هو 3/1 . نختار عشوائيا قطعة واحدة من الصندوق و نرميها مرة واحدة .
أحسب ل إحتمال الحصول على وجه . (يمكنك تشكيل الشجرة)

27 يضم كيس 10 كرات بيضاء و كرتين سوداوين .
نسحب كرتين على التوالي دون إرجاع .
نرمز بـ B_1 للحادثة " الكرة المسحوبة في المرّة الأولى بيضاء "
و بـ B_2 للحادثة "الكرة المسحوبة في المرّة الثانية بيضاء "
- أحسب الإحتمال $p(B_1)$ ثم مباشرة $p(B_2 / B_1)$ و استنتج $p(B_2 \cap B_1)$

28 B،A كيسان . يضم A كرة حمراء و كرة خضراء.
الكيس B يضم 3 كرات حمراء و كرة واحدة خضراء .
نسحب كرة من الكيس A و نضعها داخل الكيس B ثم نسحب كرة من الكيس B .
1) شكل الشجرة المناسبة
2) ما احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون .
3) ما احتمال الحصول على كرة حمراء في السحبة الأولى بشرط أن تكون الكرة الثانية سوداء .

29 يضم صندوق كرتين سوداوين و ثلاث كرات بيضاء.
نسحب عشوائيا كرة واحدة . إذا كانت بيضاء ، نعيدها الى الصندوق و نضيف كرة بيضاء أخرى و إذا كانت سوداء نعيدها الى الصندوق مع إضافة كرة سوداء أخرى ثم نسحب كرة ثانية .
1) شكّل الشجرة المناسبة
2) أحسب إحتمال الحوادث التالية :
A "يوجد 3 كرات سوداء في الصندوق قبل السحبة الثالثة "
B "يوجد 5 كرات بيضاء في الصندوق قبل السحبة الثالثة"

30 يتكون قسم من 25 % من البنات و 75 % من الأولاد .
نفترض أن 60 % من البنات و 30 % من الأولاد هم تلاميذ جيدون . نأخذ عشوائيا تلميذا من القسم .
1- ما احتمال أن يكون : أ- بنتا ؟ ب- ولدا ؟ جـ- جيدا ؟
2- ماهو احتمال أن يكون ذلك التلميذ بنتا علما أنها عنصرا جيدا ؟

31 يضم كيس خمس كرات بيضاء مرقمة من 1 الى 5 و ثلاث كرات حمراء مرقمة من 6 إلى 8 و كرتين خضراوين يحملان الرقمين 9 و 10 .
- نسحب عشوائيا على التوالي دون ارجاع .
1- أحسب إحتمال الحوادث التالية :
A " الكرتان تحملان رقمين فرديين "
B " الكرتان من نفس اللون "

elbassair.net

C " الكرتان تحملان رقميين فرديين و من نفس اللون "

- هل الحادثتان A و B مستقلتان ؟

2- ما إحتمال الحوادث التالية :

D " الكرتان من لونين مختلفين "

E " الكرتان من لونين مختلفين و تحملان رقمين فرديين "

3- علما أننا سحبنا كرتين من لونين مختلفين . ما إحتمال أن يكون رقماهما فرديين ؟

32 (X) ، (Y) راميا قوس ، كل منهما يسدد سهما نحو هدف. احتمال كل منهما في إصابة الهدف 0,85 ، 0,90 على الترتيب .

إذا علمت أن :

- إحتمالات إصابة الرامي (X) المناطق I – II – III على الترتيب هو $\frac{1}{12}، \frac{1}{3}، \frac{7}{12}$.

- إحتمالات إصابة الرامي (Y) المناطق I – II – III متساوية .

1- الرامي (X) يسدد سهمه ثلاث مرات متتابعة :

أ- ما احتمال أن يصيب في كل رمية المنطقة III ؟

ب- ما احتمال أن يصيب المناطق I – II – III بهذا الترتيب ؟

جـ- ما احتمال أن يصيب المناطق I – II – III ؟

2- نختار أحد الراميين مع العلم أن احتمال اختيار الرامي (X) ضعف احتمال اختيار الرامي (Y) .

أ- في حالة تسديد رمية واحدة . ما احتمال أن تصيب هذه الرمية المنطقة III ؟

ب- علما أن رمية واحدة قد سُدّدت و أصابت المنطقة III ما احتمال أن تكون هذه الرمية للرامي (X) ؟

33 عمر و يوسف صديقان حميمان . تعاهدا على أن لا يفترقا أبدا ، حتى الموت . لكن يوسف المسكين يعاني من مرض خطير قال بشأنه الأطباء أن إحتمال أن يعيش يوسف عشر سنوات قادمة هو 0.5 .

- " لكل أجل كتاب " - إذا كان إحتمال أن يعيش عمر هذه المدة هو 0.7 فأحسب:

-1- إحتمال أن يعيشا معا هذه المدة.

-2- إحتمال ان يعيش عمر وحده هذه المدة.

-3 -إحتمال أن يعيش واحد منهما فقط هذه المدة.

-4- إحتمال ان يعيش يوسف وحده هذه المدة.

-5- إحتمال ان لا يعيشا معا هذه المدة.

-6- إحتمال أن لا يعيشا هذه المدة.

-7- أحسب مجموع الاحتمالات التي حصلت عليها . ماذا تستنتج ؟

34 يريد تلميذ حل معادلات من الدرجة الثانية .

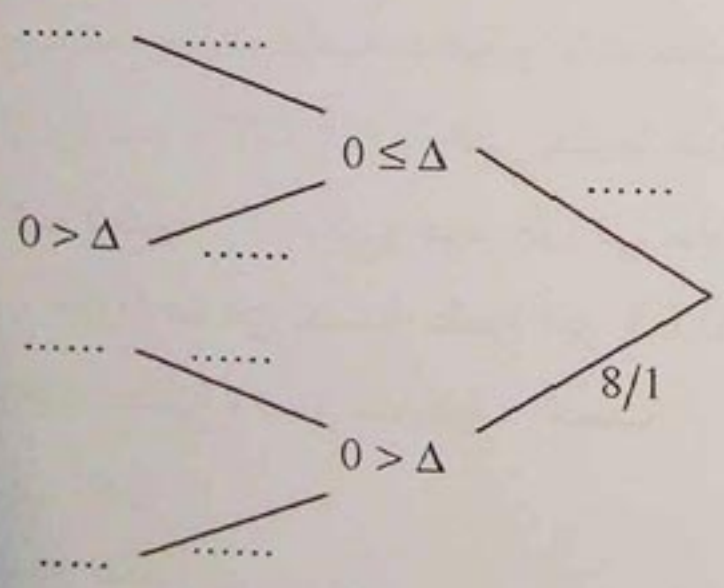
إذا علمت أن احتمال أن يكون مميز المعادلة الأولى **سالب** هو $\frac{1}{8}$ ، نفرض صحة الشرطين التاليين :

- احتمال أن يكون مميز معادلة ما **سالب** بشرط أن يكون مميز المعادلة السابقة **سالب** هو $\frac{1}{20}$

- احتمال أن يكون مميز معادلة ما **سالب** بشرط أن يكون مميز المعادلة السابقة **موجب أو معدوم** هو $\frac{1}{20}$

1- إذا كان التلميذ يريد حل معادلتين فقط(الأولى و الثانية).

أ- أكمل الشجرة (العنكبوتية) التالية



المعادلة الأولى المعادلة الثانية

ب) ليكن X ـــ ـــ ـــ

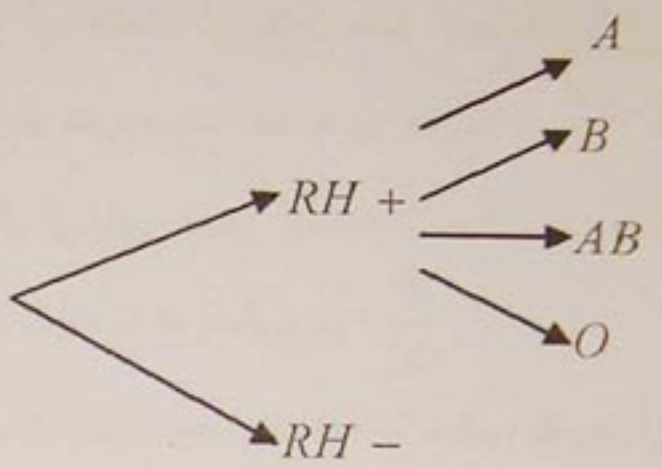
حلولا حقيقية ؟

35 الزمر الدموية :

الجدول التالي يبين توزيع مختلف الزمر الدموية على عينة من الناس

الزمرة	O	A	B	AB
Rh +	39%	38%	6%	2%
Rh -	6%	6%	2%	1%

1) أكمل الشجرة التالية



2) أخذ شخص عشوائيا من هذه العينة ، ما احتمال

أ) أن تكون فصيلته موجبة ؟

ب) أن تكون فصيلته سالبة علما أن زمرته O ؟

36 ينتج مصنع آلات حاسبة عادية وآلات حاسبة علمية إلا أن عدد الآلات العادية التي ينتجها ضعف عدد الآلات العلمية . احتمال وجود خلل في حاسبة عادية هو 0,05 أما في حاسبة علمية فهو 0,03 نأخذ المراقب حاسبة واحدة عشوائيا . أحسب احتمال أن تكون :

1) الحاسبة عادية .

2) الحاسبة علمية

3) الحاسبة فيها خلل ؟

4) الحاسبة عادية علما أن فيها خلل .

37 1) A و B حادثتان مستقلتان . بين أن

أ) A و $\overline{B}$ مستقلتان ب) $\overline{A}$ و B مستقلتان

ج) $\overline{A}$ و $\overline{B}$ مستقلتان

2) يرمي قاذفان T و S في نفس الوقت هدفا معينا .

الحادثتان A " S يصيب الهدف " ، B " T يصيب الهدف " مستقلتان و احتمالاهما $p_S=\frac{4}{5}$ و $p_T=\frac{7}{8}$ على الترتيب.

- أحسب احتمال الحوادث التالية :

أ) S و T يصيبان الهدف ب) S فقط يصيب الهدف

ج) الهدف لم يصب د) الهدف يصاب

هـ) قاذف واحد يصيب الهدف

38 (A) ، (B) صندوقان . الصندوق (A) يحوي 5 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء أما الصندوق (B) فيحوي 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء و كل الكرات متماثلة .

نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق (B) و نسجل لونها و نعيدها الى الصندوق (B) الذي نسحب منه كرة أخرى و نسجل لونها أيضا .

1- ما إحتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟

2- ما إحتمال الحصول على كرتين من نفس اللون ؟

3-X متغير عشوائي يرفق كل كرة بيضاء بالعلامة (+ α) و كل كرة سوداء بالعلامة (- α) .

أ- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي تا ثم أحسب أمله الرياضي $E(X)$.

ب- عين قيمة العدد الحقيقي α حتى يكون $E(X)=1$

4- نضيف الى الصندوق (B) ، n-3 كرة سوداء و نعيد عملية السحب المبينة أعلاه .

أ- ما إحتمال الحصول على كرتين بيضاوين ؟

ب- كم من كرة سوداء ينبغي إضافتها الى الصندوق (B) حتى يكون إحتمال سحب كرتين بيضاوين هو 0,25 ؟

39 يسدد رامي ثلاث رميات متتالية نحو هدف (أنظر الى الشكل) .



إذا علمت أن إحتمال إصابة هذا الرامي للهدف هو 0,7 .

1- أحسب إحتمال أن يصيب

elbassair.net
موقع عيون البصائر التعليمي

الرامي الهدف ثلاث مرات ؟

2- أحسب إحتمال أن يصيب الرامي الهدف مرتين فقط ؟

3- أحسب إحتمال أن يصيب الرامي الهدف مرة واحدة على الأقل ؟

4- إذا علمت أن الهدف مقسم الى ثلاث مناطق (الشكل) بحيث إحتمال أن يصيب هذا الرامي المنطقة (1) هو 0,1 و احتمال أن يصيب المنطقة (2) هو 0,2 و احتمال أن يصيب المنطقة (3) هو 0,4 فأحسب احتمال .

أ- أن يصيب المنطقة (1) ثلاث مرات ؟

ب- أن تصيب كل رمية منطقة واحدة فقط ؟

5- ليكن تا المتغير العشوائي الذي يرفق إصابة المنطقة (1) بالعلامة 10 و المنطقة (2) بالعلامة 7 و المنطقة (3) بالعلامة 5 و إذا أخطأ الهدف كلية كانت العلامة صفر .

- عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي تا ثم أحسب أمله الرياضياتي و انحرافه المعياري .

40 في لعبة يرمي اللاعب زهرة نرد متجانسة مرة واحدة و كلما كان الرقم زوجيا سمح له برمية أخرى و هكذا و تنتهي اللعبة بعد 10 رميات إجباريا أو بتوقف اللاعب عن الرمي تلقائيا .

1- ما إحتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الاولى؟

2- ما إحتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الثانية؟

3- إذا أراد اللاعب أن يكون إحتمال حصوله على رقم فردي أكبر من 0,03 فما هو عدد الرميات الذي لا ينبغي تجاوزه ؟

4- تقتضي هذه اللعبة أن يدفع اللاعب 1DA مقابل كل محاولة (و لا يدفع مادام يحصل على رقم زوجي) على أن يربح 5DA إذا حصل على رقم زوجي .

أ- ما إحتمال أن يربح اللاعب 20 DA ؟

ب- ما إحتمال أن لا يخسر و لا يربح ؟

5) تعدل اللعبة بالكيفية التالية : صاحب الرقم الزوجي يربح 5 DA و صاحب الرقم الفردي يخسر 2 DA و على كل لاعب أن يحاول 3 مرات فقط إلزاميا .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق كل محاولة بالمبلغ المحصل عليه .

- عرف قانون الإحتمال ثم أحسب امله الرياضياتي و انحرافه المعياري .

41 يريد أحمد أن يتصل بسعيد هاتفيا لكنه - لسوء حظه- نسي الرقم تماما ، فقرر عبثا القيام ببعض المحاولات و ذلك بتشكيل أعداد من 6 أرقام . إذا كان P هو إحتمال أن يصيب مبتغاه في المحاولة الأولى.

تعطى النتائج على الشكل ($n\times10^{-6}$)

1- أحسب P .

2- تذكر أحمد أمرا هاما ، الرقم الصحيح يضم رقمين زوجيين متمايزين فقط . أحسب أنت P إن استطعت .

3- بعد قليل تذكر أحمد شيئا آخر . من بين الأرقام الفردية يوجد رقمان فقط من مضاعفات 3."إن كنت ذكيا" أحسب P.

4- و ها هو أحمد بنفسه يؤكد لك أن الرقمين الزوجيين مجموعهما يساوي 10 . فهل بإمكانك الآن حساب P ؟

5- سأل أحمد أخاه علي . هل تعرف رقم هاتف سعيد ؟ قال علي : لا ، لكني أعرف أنه يضم أربعة أرقام فردية منها إثنان متساويان و متتابعان . ساعدهما أنت بحساب P.

6- و يصرخ أحمد لقد تذكرت . إن أحد الرقمين الزوجيين هو 8 و ترتيبه الاول و الرقم الأخير هو 7 . هل تتكرم أنت بحساب P ؟

7- و بعد عدة محاولات إستطاع أحمد الإتصال بسعيد الذي ضحك كثيرا لسماعه القصة و قال له يا أحمد تذكر دائما أن مجموع أرقام هاتفي يساوي 30 و هو مكون من أربعة أرقام متساوية مثنى مثنى و متتابعة فإلى اللقاء .

- إن فهمت القصة فما رقم هاتف سعيد ؟

42 في دراسة خاصة بحالة سيارات مدينة ما .تبين أن :

12 % من السيارات ذات مكابح ضعيفة

- من بين السيارات ذات المكابح الضعيفة هناك 20 % لها إضاءة ضعيفة

- من بين السيارات ذات المكابح القوية هناك 8 % لها إضاءة ضعيفة

و قصد سلامة الطرقات طُلب من شرطة المرور تكثيف المراقبة . نعتبر الحادثتين التاليتين :

elbassair.net

- إذا حصل (A) على وجه و (B) على ظهر تتوقف اللعبة و يُعلن (A) فائزا و يأخذ المبلغ المدفوع .
- إذا حصل (A) على ظهر و (B) على وجه تتوقف اللعبة و يُعلن (B) فائزا و يأخذ المبلغ المدفوع .
- الحالات الأخرى تعتبر تعادلا، يضاعف اللاعبان مبلغ اللعب و يبدءان في المحاولة من جديد .و هكذا تستمر اللعبة و لا تتوقف إلا بفوز أحدهما أو بعد حصول التعادل في المرة العشرين و حينها يستعيد كل لاعب مبلغه المدفوع

من أجل كل عدد طبيعي n محصور بين 1 و 20 نعتبر الحوادث التالية :

" A_n " اللعبة تنتهي في المحاولة النونية بفوز (A) "

" B_n " اللعبة تنتهي في المحاولة النونية بفوز (B) "

" I_n " المحاولة النونية هي تعادل "

نضع : $X_n = p(A_n)$ ، $Y_n = p(B_n)$ ، $Z_n = p(I_n)$ " p " هو رمز للاحتمال "

1- أ- أحسب X_1 ، Y_1 ، Z_1.

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي ن محصور بين 1 و 19 لدينا : $X_{n+1} = \frac{1}{4}Z_n$ و $Y_{n+1} = \frac{1}{4}Z_n$.

و $Z_{n+1} = \frac{1}{2}Z_n$.

جـ- استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي محصور بين 1 و 20 لدينا : $X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ و $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

و $Z_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

2- نعتبر المتغير العشوائي T " مبلغ اللعب أثناء المحاولة التي تنتهي اللعبة " (أي المبلغ الذي يحصل عليه الفائز أو المبلغ الذي يتقاسمه اللاعبان في حالة انتهاء اللعبة بالتعادل) .

إذا توقفت اللعبة في المحاولة k يكون حينها $T = 2k$.

أ- حدد أكبر قيمة لـ T .

ب- أحسب $p(T=202)$.

(يمكنك ملاحظة أن المحاولة التاسعة عشر كانت تعادلا)

جـ- من أجل كل عدد طبيعي k محصور بين 1 و 19.

فسّر الحادثة " $T = 2k$ " بدلالة A_k و B_k و استنتج $p(T=2k)$

د- أحسب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي T و انحرافه المعياري .

4 - قانون ثنائي الحد و قانون برنولي

46 يوم مشمس أم ممطر ؟

في مدينة افتراضية كل يوم احتمال أن تمطر السماء فيها هو 0,4 . في خمسة أيام متتابعة قادمة ، ما احتمال أن تمطر السماء مرتين فقط ؟

47 المطلوب ... الجدية

في مؤسسة يتكون فيها 12 متربصا . دراسة إدارية استنتجت أ، احتمال غياب أحد المتربصين هو 0,14.

قصد محاربة الغيابات قرر المؤطرون إلغاء التربص إذا كان عدد المتربصين الحاضرين أقل أو يساوي 7 .

ما احتمال إلغاء التربص ؟

48 بنت بأي ثمن ؟

سعيد غير سعيد فهو يحب أن يرزق ببنت . نفرض أن احتمال أن تنجب زوجته بنتا هو 054 .

يتساءل سعيد كم من مرّة على زوجته أن تنجب حتى تكون نسبة حصوله على بنت لا تقل عن 99% .

- هل يمكنك مساعدته ؟

49 في امتحان شهادة بكالوريا كانت نسبة النجاح % 40.

ما احتمال ضمن 5 أصدقاء مرشحين :

1) أن لا يكون أي ناجح ؟

2) أن ينجح واحد فقط ؟

3) أن ينجح إثنان فقط ؟

4) أن ينجح على الأقل إثنان ؟

5) أن ينجح الأصدقاء الخمسة ؟

50 عائشة ، فاطمة و خديجة ثلاث صديقات تقدمن لامتحان شهادة البكالوريا بحظوظ متفاوتة متناسبة مع مجهودات كل واحدة خلال السنة الدراسية . إذا علمت أن إحتمال نجاح فاطمة 0.9 وإحتمال نجاح عائشة 0.45 و احتمال نجاح خديجة . أحسب إحتمال أن:

1- تنجح الصديقات الثلاث معا.

موقع عون التعليمي
مصادر التعليمي

elbassair.net

2- تنجح واحدة منهن على الأقل.

3- تنجح صديقتان فقط.

4- تنجح صديقتان من بينهما فاطمة

51 نرمي زهرة نرد عادية أربع مرات متتابعة.

1- أحسب P إحتمال أن يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي يساوي عدد مرات ظهور رقم فردي.

2- أحسب p' إحتمال أن يكون عدد مرات ظهور رقم زوجي أكبر تماما من عدد مرات ظهور رقم فردي.

3- أجب عن السؤالين (1) و (2) من أجل خمس رميات متتابعة لزهرة النرد هذه.

4- نرمي زهرة النرد هذه n مرة . أحسب P .

52 في إحدى المسابقات يطرح على المرشح ثلاثة سؤال مرفوق بثلاثة أجوبة مقترحة متشابهة ، واحدة منها فقط صحيحة .قدم المترشح إجابة عشوائيا و دون تفكير .

1) ما إحتمال أن تكون إجابته صحيحة ؟

2) المسابقة مكونة من 5 أسئلة من الشكل السابق .

أ) ما احتمال أن يقدم هذا المترشح إجابة صحيحة عن :

- 3 أسئلة ؟ - 4 أسئلة ؟ - 5 أسئلة ؟

ب) إذا كان النجاح في المسابقة يقتضي الإجابة الصحيحة عن 3 أسئلة على الأقل . ما احتمال نجاح هذا المترشح الذي يعتمد على العشوائية في الإجابة ؟

ج) ما احتمال نجاح مترشح آخر يملك الإجابة الصحيحة عن سؤالين من الخمسة ؟

53 1) نرمي حجري نرد عاديين مرة واحدة .

- ما احتمال الحصول على رقمين مجموعهما أكبر أو يساوي 10 ؟

2) نرمي الآن حجر النرد 5 مرات متتابعة و ليكن X عدد المرات التي نحصل فيها على رقمين مجموعهما أكبر أو يساوي 10 في خلال خمس رميات .

- عرّف قانون الإحتمال لـ X و احسب أمله الرياضياتي و انحرافه المعياري .

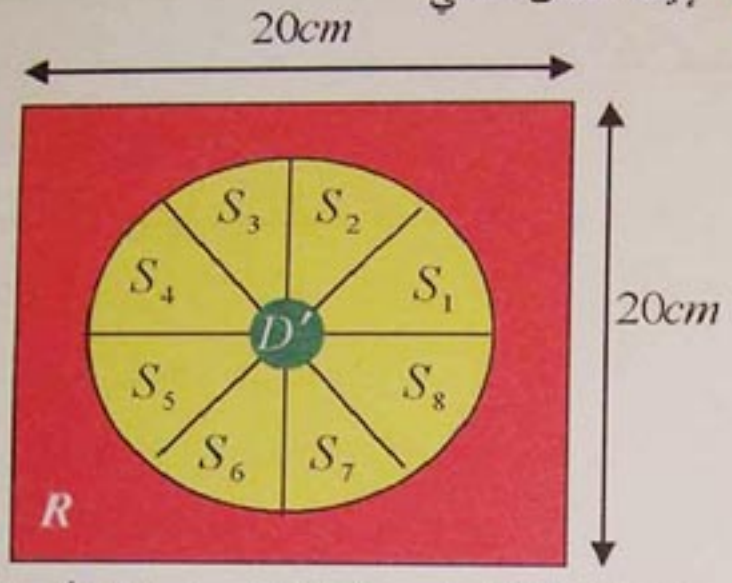
54 يحب مراد صناعة النكت لكنه للأسف لا يوفق أحيانا افي تشكيل النكتة المرحة حيث احتمال أن تكون النكتة هو 0,05.

علما أنه يشكل نكتة كل يوم أحسب إحتمال أن يشكل نكتة مرحة :

1) في أسبوع. 2) في شهر (30 يوما) 3) في سنة(365 يوم)

55 نرمي قطعة نقود عادية n مرّة . بداية من أية رمي يصبح احتمال الحصول على وجه واحد على الأقل أكبر تماما من 98% ؟

56 إليك الشكل التالي



نضع عشوائيا نقطة على هذا الشكل . احتمال أن تكون النقطة في جزء ما هو نسبة مساحة هذا الجزء الى مساحة المربع .

1) أ) أحسب $p(D)$ احتمال أن تكون النقطة على القرص الأخضر 'D .

ب) أحسب $p(S_1)$ احتمال أن تكون النقطة على الجزء S_1 من القرص الأصفر الكبير .

2) من أجل القيم التقريبية التالية $p(D)=0,008$ و $p(S_k)=0,0785$ مع $k \in \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$

نعتبر اللعبة التالية :

- إذا كانت النقطة على القرص 'D نربح 10 DA
- إذا كانت النقطة على الجزء S_k نربح k DA مع $k \in \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$
- إذا كانت النقطة تقع في المنطقة R الحمراء نخسر 4 DA

نرمز بـ X للمبلغ المحصل عليه من هذه اللعبة .

أ) أحسب $p(R)$ ثم أحسب الأمل الرياضياتي لـ X .

ب) نلعب مرتين متتابعتين ، أي وضعنا عشوائيا و بكيفيتين مستقلتين نقطتين داخل المربع . أحسب احتمال الحصول

elbassair.net

على مبلغ موجب أو معدوم .

ج) ليكن n عدد طبيعي أكبر أو يساوي 2 . نلعب n مرّة متتابعة أي وضعنا n نقطة عشوائيا و بكيفيات مستقلة داخل المربع . أحسب الإحتمال p_n للحصول على نقطة واحدة على الأقل داخل القرص D' .

- حدد أصغر قيمة لـ n يكون من أجلها $p_n \geq 0,9$

57 نرمي 12 حجرة نرد مرة واحدة و نسجل عدد مرات ظهور الأرقام 4 ، 5 أو 6 و ليكن x .

1) أحسب $\overline{x}$ و σ

2) نقوم الآن برمي الأحجار الإثني عشر ، 6500 مرّة متتابعة و نسجل قيمة x في كل مرة (أنظر الجدول)

x_i	0	1	2	3	4	5
n_i	1	14	103	302	711	1231
6	7	8	9	10	11	12
1411	1351	844	391	117	21	3

أحسب $\overline{x}$ و σ من أجل النتائج في الجدول و قارنها مع نتائج السؤال (1)

3) أحسب نظريا عدد المرات الموافقة للقيم n_i

58 يضم صندوق 5 قريصات.4 سوداء و واحدة بيضاء.

1) نسحب من الصندوق 6 قريصات على التوالي مع الإرجاع .ليكن X عدد القريصة البيضاء المسحوبة.

- عرّف قانون الاحتمال لـ X و احسب أمله الرياضياتي و انحرافه المعياري .

2) نقوم الآن بالسحب n مرّة (بنفس الكيفية السابقة) .

ليكن X_n عدد القريصة البيضاء المسحوبة.

- عرّف قانون الاحتمال للعدد X_n و احسب أمله الرياضياتي و انحرافه المعياري .

3) ليكن Y_n العدد الحقيقي $\frac{X_n}{n}$ الذي يمثّل تواترات ظهور القريصة البيضاء

- عرّف قانون الاحتمال للعدد Y_n و احسب أمله الرياضياتي و انحرافه المعياري .

59 I) نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة كما يلي :

$U_1 = \frac{1}{2}$ و العلاقة التراجعية $U_{n+1} = \frac{1}{6}U_n + \frac{1}{3}$.

لتكن (V_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل $n \geq 1$ كما يلي $V_n = U_n - \frac{2}{5}$

- تحقق أن المتتالية (V_n) هي هندسية يطلب تحديد أساسها . أكتب U_n بدلالة n

II) نعتبر حجر نرد A و B حيث A يحوي 3 أوجه حمراء و 3 أوجه بيضاء بينما يحوي B ، 4 أوجه حمراء و وجهين أبيضين . نأخذ عشوائيا أحد الحجرين و نرميه ، إذا حصلنا على وجه أحمر نحتفظ بنفس الحجر و إذا تحصلنا على وجه أبيض نغير الحجر و نرمي مرّة ثانية و هكذا .. نسمي A_n الحادثة " نستعمل الحجر A في الرمية n " و $\overline{A_n}$ الحادثة العكسية لها كما نسمي R_n الحادثة " نستعمل الحجر R في الرمية n " و $\overline{R_n}$ الحادثة العكسية لها و نرمز بالرمزين a_n ، r_n لاحتمالي الحادثتين A_n و R_n على الترتيب .

1) عين a_1 و r_1 (يمكن استعمال شجرة الاحتمالات)

2) بملاحظة أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون $R_n = (A_n \cap R_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$ و بين أن

$$r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$$

3) تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون

$$A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$$

4) استنتج أجل كل $n \geq 1$ يكون $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$ ثم أكتب a_n بدلالة n

5) استنتج عبارة r_n بدلالة n ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$

60 لصيانة أجهزة التدفئة تراقب شركة عن بعد خلال فصل الصيف الأجهزة .

نعلم أن 20% من الأجهزة هي تحت الضمان . من بين الأجهزة التي تحت الضمان يكون احتمال عدم صلاحية

موقع عباقرة البصائر التعليمي

elbassair.net

تمارين

أحداها $\frac{1}{100}$ ، و من بين الأجهزة التي ليست تحت الضمان يكون احتمال عدم صلاحية أحدها $\frac{1}{10}$.

نسمي G الحادثة " المدفئة تحت الضمان "

1) أحسب احتمال الحوادث التالية :

A " المدفئة تحت الضمان و هي غير صالحة " ،

B " المدفئة غير صالحة "

2) في سكن ما المدفئة غير صالحة . بين أن احتمال أنها تحت الضمان هو $\frac{1}{41}$

3) المراقبة مجانية إذا كانت المدفئة تحت الضمان ، و يقدر ثمن المراقبة بـ 800 DA إذا كانت المدفئة ليست تحت الضمان و هي صالحة بينما يقدر بـ 2800 DA إذا كانت المدفئة ليست تحت الضمان و هي صالحة .

ليكن X قيمة ثمن تكلفة مراقبة مدفئة . عين قانون احتمال X و أمله الرياضياتي

مسائل

61 يضم صندوق 10 كرات مرقمة من 0 إلى 9 يطلب من اللاعب أن يسحب 3 كرات على التوالي دون إرجاع .

و لتكن(x , y , z) هي النتائج مرتبة حسب رتبة سحبها .

1- أحسب احتمال الحصول على النمط التالي :

- النمط الأول ($x = y = z$) و ليكن $p(1)$.
- النمط الثاني ($x = y \neq z$) و ليكن $p(2)$
- النمط الثالث ($x = z \neq y$) و ليكن $p(3)$.
- النمط الرابع ($y = z \neq x$) و ليكن $p(4)$.
- النمط الخامس (x , y , z مختلفة مثنى مثنى) و ليكن $p(5)$

2- أحسب $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5)$.

3- إذا علمت أن اللاعب يربح 100 DA إذا سحب النمط الثاني أو الثالث أو الرابع و يخسر a DA إذا سحب النمط الأول أو الخامس .

أ- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي T الذي يرفق كل عملية سحب بالمبلغ المحصل عليه .

ب- أحسب الأمل الرياضياتي .

جـ- من أجل أي قيمة للعدد a يكون اللعب متعادل (لا خسارة و لا ربح) ؟.

62 صنعت سيدة بيت نوعين من الحلوى ، 10 حبة باستعمال الفول السوداني (النوع A) و 10 حبات باللوز (النوع B) .

في وجبة المساء حضرت السيدة الشاي و وضعت في صحن بني x حبة من النوع A و $10 - x$ حبة من النوع B و في صحن آخر أبيض وضعت $10 - x$ حبة من النوع A و x حبة من النوع B.

أخذ ابنها الصغير حبة من الصحن البني و وضعها في الصحن الأبيض فجاء أخوه الأكبر و أخذ حبة من الصحن الأبيض و وضعها في الصحن البني نسمي E الحادثة " الصحنان يحويان نفس العدد من حبات الحلوى بنوعيها قبل و بعد تدخل الابن الأصغر "

1) أنشئ الشجرة المثقلة لترجمة الوضعية من أجل $x = 4$. أحسب $p(E)$

2) برهن أنه من أجل كل x من [0 ; 10] لدينا

$$p(E) = \frac{-2x^2 + 20x + 10}{110}$$

3) حل المتراجحة $p(E) \succ p(\overline{E})$

- من أجل أي قيمة لـ x يكون للابن الأصغر الحظ الأكبر في أن لا تعرف الحبة التي نقلها من قبل أخيه الأكبر ؟

4) من أجل أي قيمة لـ x ، يكون $p(E)$ أعظميا ؟

63 قبل انطلاق الألعاب الأولمبية الرياضية تجرى فحوصات و تحاليل على الرياضيين من قبل لجنة رسمية لكشف المنشطات المحظورة

علما أن هناك منشطات لا يمكن التعرف عليها لأسباب مختلفة و أخرى مجهولة لدى الرياضيين فاللجنة تصدر إذن قراراتها بسلبية التحاليل أو إيجابياتها مع وجود هامش للخطأ

elbassair.net

نضع:

D الحادثة " الرياضي متناول للمنشطات "

O الحادثة " تحاليل الرياضي موجبة "

E الحادثة " اللجنة ارتكبت خطأ "

1) في هذا السؤال نفرض أن 50% من الرياضيين غير مستعملين للمنشطات و احتمال أن تكون تحاليل الرياضي موجبة مستقلة عن الحالة الحقيقية للرياضي

تتبعنا تحاليل عينة من الرياضيين فوجدنا أن 20% منهم قال بشأنهم اللجنة أن تحاليلهم كانت موجبة .أخذنا رياضيا عشوائيا من هذه العينة.

أحسب احتمال

أ) أن يكون الرياضي غير مستعمل للمنشطات إلا أن اللجنة قالت أن تحاليله موجبة

ب) أن يكون الرياضي مستعمل للمنشطات و اللجنة قالت أن تحاليله سالبة .

ج) الحادثة E

2) في هذا السؤال نضع p تواتر الرياضيين المستعملين للمنشطات و الذين أجريت عليهم التحاليل

نفرض أن احتمال الإعلان عن تحاليل إيجابية لا يعكس الحالة الحقيقية

- احتمال الإعلان أن تحاليل ما أنها إيجابية هو 0,9

- احتمال أن يعلن أن تحاليل رياضي غير مستعمل للمنشطات إيجابية هو 0,1

نأخذ رياضيا عشوائيا

أ) أنشئ الشجرة المثقلة

ب) أحسب احتمال E

ج) أحسب بدلالة p ، احتمال أن يعلن أن تحاليل هذا الرياضي موجبة

د) نهتم باحتمال أن تكون التحاليل التي أعلن أنها موجبة تعكس تماما حلة الرياضي المستعمل للمنشطات نرمز له بالرمز f(p) معرف بـ $f(p)=\frac{0,9p}{0,8p+0,1}$

حل المتراجحة $f(p)\geq 0,9$.

فسّر هذه النتيجة.

elbassair.net
موقع عيون البصائر التعليمي

اختيار من متعدد

64 في كل سؤال جواب واحد فقط صحيح

A و B حادثتان من فضاء احتمالي حيث

$P(A)=0,7$ ، $p(B)=0,4$ و $p(A\cup B)=0,2$

1) قيمة الاحتمال $p(A\cup B)$ هي :

a) 0,9 b) 1,1 c) 0,6

2) قيمة الاحتمال $p(\overline{A}\cap B)$ هي :

a) 0,8 b) 0,2 c) 0,1

قيمة الاحتمال $p(\overline{A}\cap\overline{B})$ هي :

a) 0,8 b) 0,1 c) 0,3

قيمة الاحتمال $p(\overline{A}\cup\overline{B})$ هي :

a) 0,8 b) 0,9 c) 0,1

65 جواب واحد على الأقل فقط صحيح

تجربة تتبع قانون برنولي حيث احتمال النجاح هو P و احتمال الإخفاق هو q

a) $p<1$

b) $p=q$

c) $p>q$

d) $p<0,5$

e) $p=1-q$

66 في كل سؤال جواب واحد فقط صحيح

لتقويم تلاؤم توزيع تواترات f_i لتجربة عشوائية ذات k مخرجا ، نحسب d_0^2 الذي يساوي

a) $\sum(f_i-k)^2$

b) $\sum\left(f_i-\frac{1}{k}\right)^2$

c) $\sum f_i^2-k$

صحيح أم خاطئ

67 60 % من مجتمع مطعمة (V) ضد مرض ما ، نلاحظ أن 5 % منهم حساسية A ، من بين الأشخاص غير المطعمين ، 10 % عرضة للحساسية A .

نختار شخصا عشوائيا مطعما ، احتمال أن يكون عرضة للحساسية هو :

a) $p_A(V)$

b) $p(V)$

c) $p_V(A)$

d) 0,10

e) 0,05

f) 0,6

68 A ، B حادثتان مستقلتان

a) $p(A\cap B)=P(A)\times p(B)$

b) $p_A(B)=p(A)$

c) $p_B(A)=p(A)$

d) $p(A\cup B)=P(A)\times p(B)$

e) $P(B)=1-p(A)$

69 في مطعم 60 % من المأكولات سمك (S) 20 % من المثلجات (G) و 30 % ليست أسماك و لا مثلجات .

a) $p(\overline{S})=0,40$

b) $p(S\cup G)=0,8$

c) $p(S\cap G)=0,1$

d) $p(S\cap\overline{G})=0,5$

e) $S\cap\overline{G}$; $\overline{S}\cap G$ غير متلائمتين

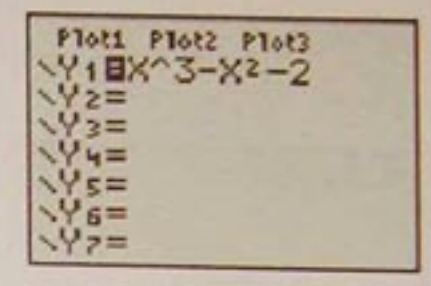
elbassair.net

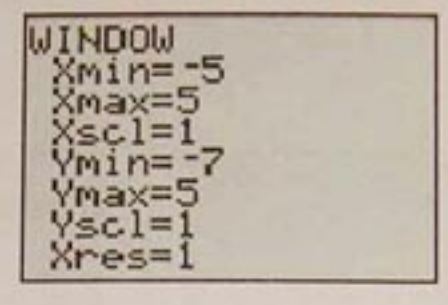
1. الدوال:

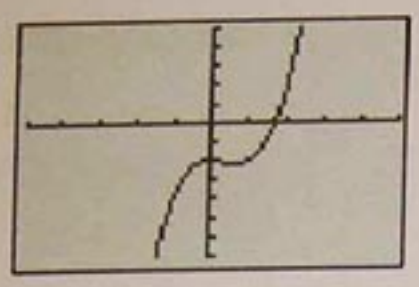
I. تمثيل دالة :

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3 - x^2 - 2$

❶ Y= ❷ WINDOW ❸ GRAPH







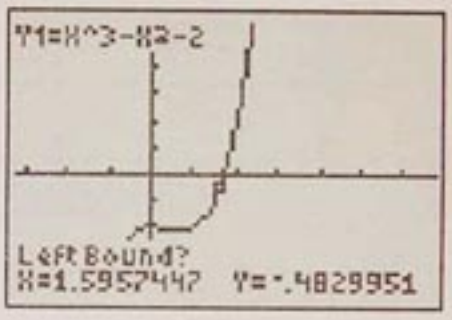
II . قراءة الفاصلة α لنقطة تقاطع المنحنى مع محور الفواصل:

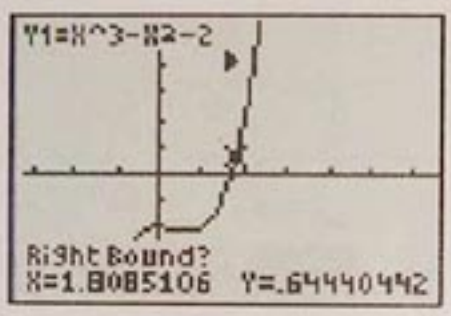
❶ TRACE ❷ باستعمال ◄ أو ► عين فاصلة أصغر من α ثم انقر ENTER

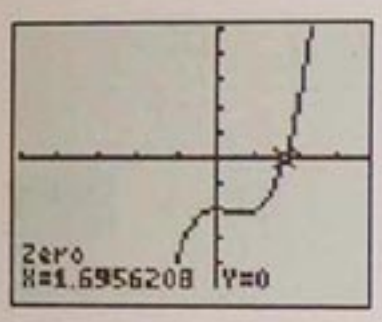
❸ عين فاصلة أكبر من α ثم انقر ENTER

❹ اضغط مرة أخرى على ENTER و نقرأ $\alpha \approx 1,6956208$







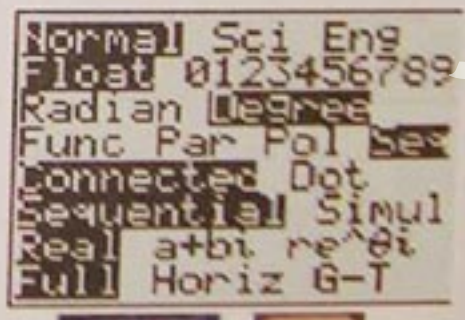


2. المتتاليات:

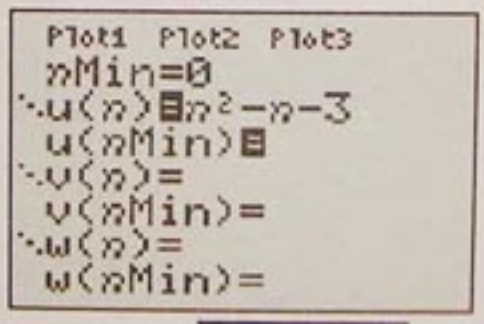
المتتالية من الشكل $u_n = f(n)$

• نمثل المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = 2n^2 - n - 3$

❶ MODE نحدد الخاصية seq



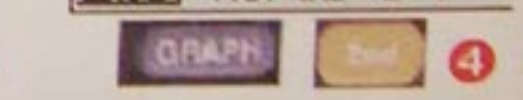
❷ Y= و لكتابة n نستعمل X,T,θ,n



❸ 2nd WINDOW 1 ENTER 0 ENTER



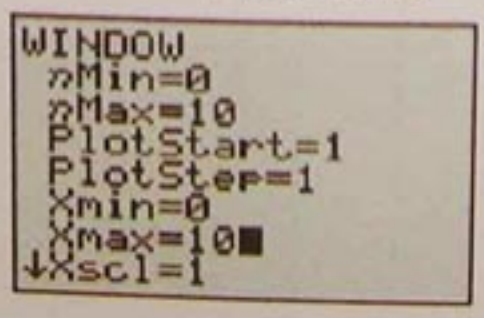
❹ GRAPH 2nd



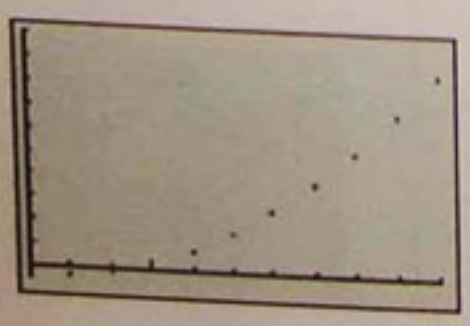
❺ و نتمم WINDOW

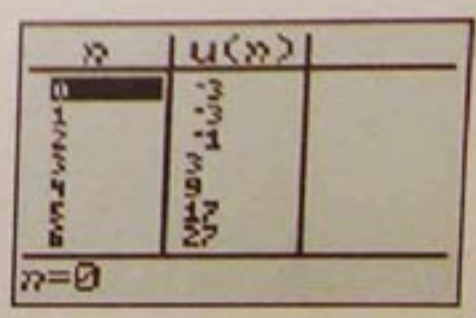
$Y\max = 100$ ، $Y\min = -5$

و $Y\text{scl} = 5$



❻ GRAPH





elbassair.net

3.متتالية معرفة بعلاقة تراجعية:

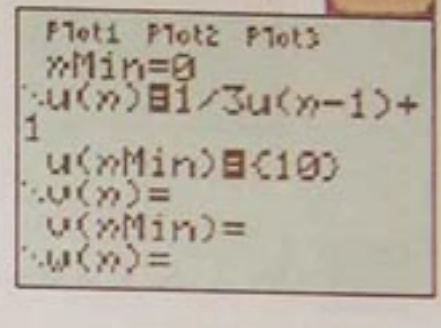
• نمثل المتتالية (u_n) المعرفة على N بـــ: $u_0 = 5$ و من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 1$ ، $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + 1$

❶ MODE

ونحدد الخاصية seq،

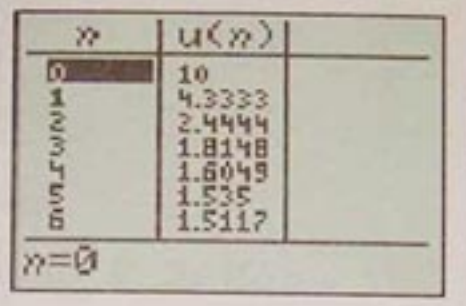
لكتابة u نضغط Y=،

ثم 7 2nd



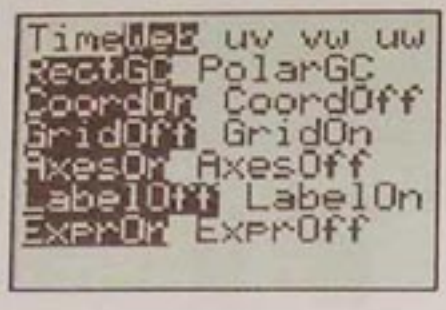
❷ WINDOW 2nd

GRAPH 2nd ثم



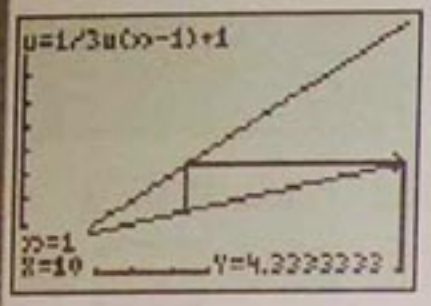
❸ 2nd 2004

ونختار web



❹ WINDOW

TRACE ثم ،نختار النافذة



4.الإحصاء:

فيما يلي نعتبر السلسلة الاحصائية التالية:

الكتلة (g)	300	400	500	600	700
التكرار	40	45	51	54	57

❶ STAT EDIT

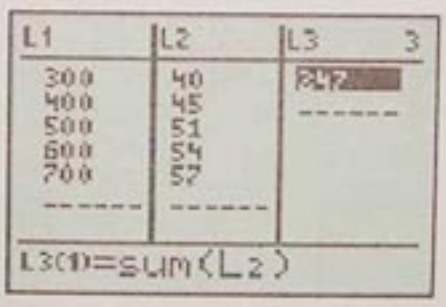
و اتمم القوائم

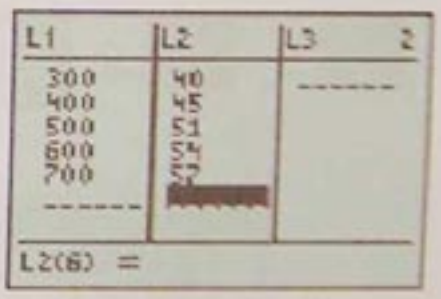
❷ لإتمام التكرار الإجمالي

في L3 : STAT 2nd

MATH5

(L2) 2 2nd Sum() ENTER





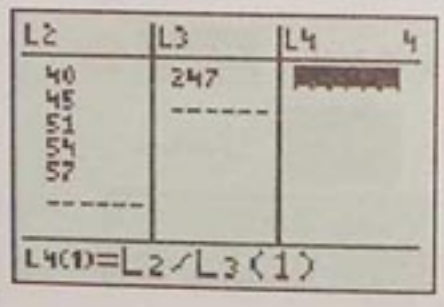
❸ لإظهار سلسلة

التواترات في L4 ،

حدد L4 ثم 2nd

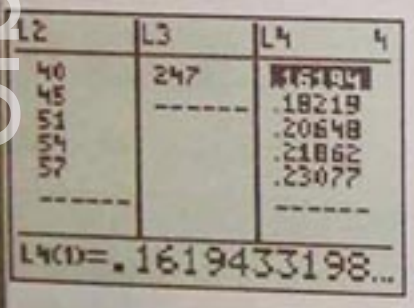
(L2)2 ÷ 2nd

(L3)3 ثم (1)



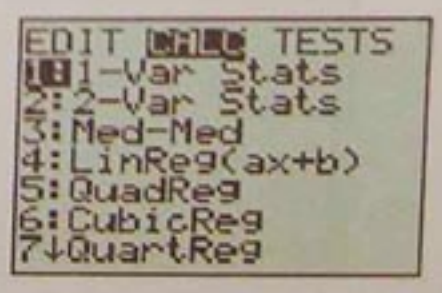
❹ انقر ENTER

فتسجل النتائج في العمود L4



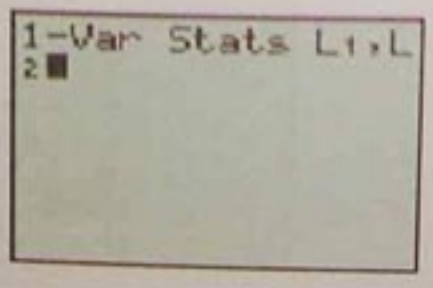
5. حساب المقاييس:

❶ STAT 1 (CALC)



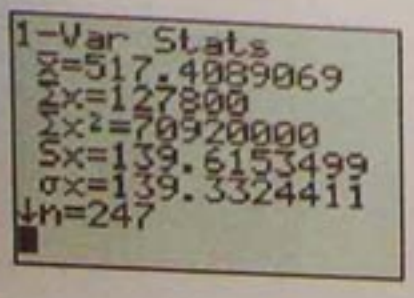
❷ 2nd ENTER

L2 ، L1



❸ 2nd ENTER

و نقرأ $\overline{X}$ ، σ_X ، Q_1 و Q_3



elbassair.net

1.متتالية معرفة بعلاقة تراجعية:

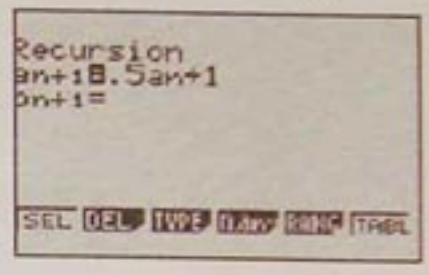
• نمثل المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $u_0=10$ و من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+1$

❶ MENU (RECUR)8

F2 (TYPE) F3

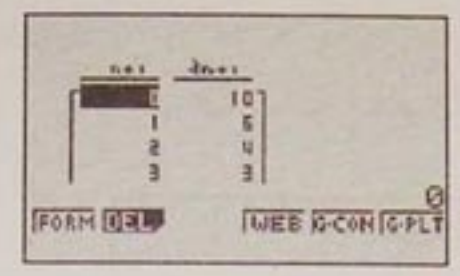
F2 F4 نستعمل (a_{n+1}).

من أجل a_n

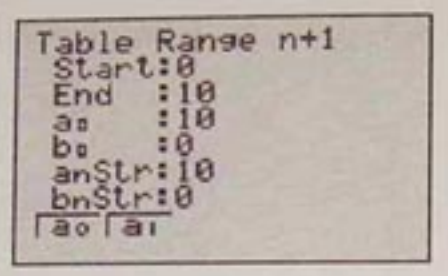


❷ F5 (RANG)

و نتمم كما يلي:



❸ F6 EXIT (TABL)

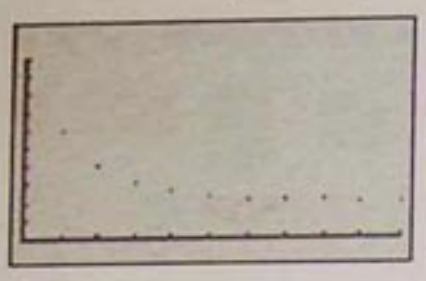


❹ SHIFT F3

نختار النافذة

F6 F6 EXIT

(G,PLT)



2. متتالية من الشكل : (n) :

• نمثل المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـــ: $u_n=2n^2-3n-4$

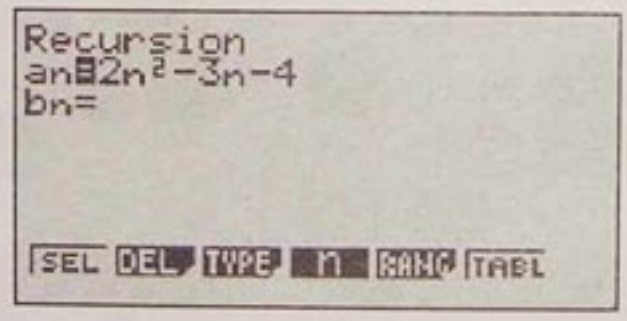
❶ MENU (RECUR)8



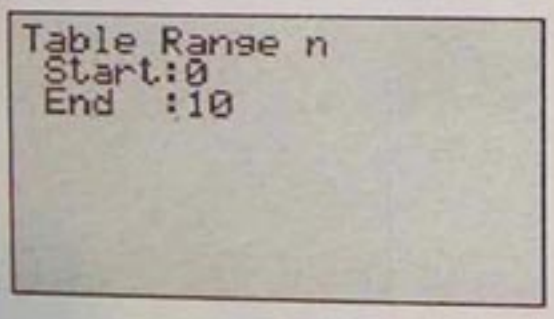
❷ (TYPE) F3 EXE

(a_n) نكمل.

نستعمل F1 من أجل n F4

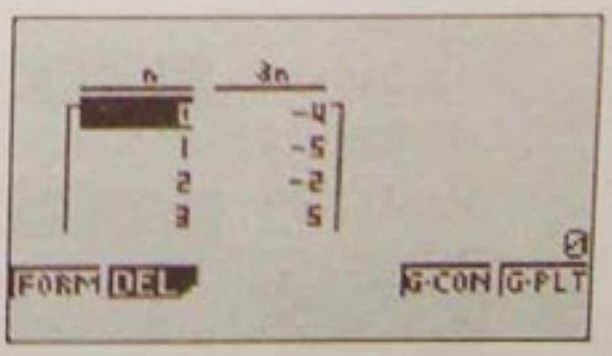


❸ (RANG) F5



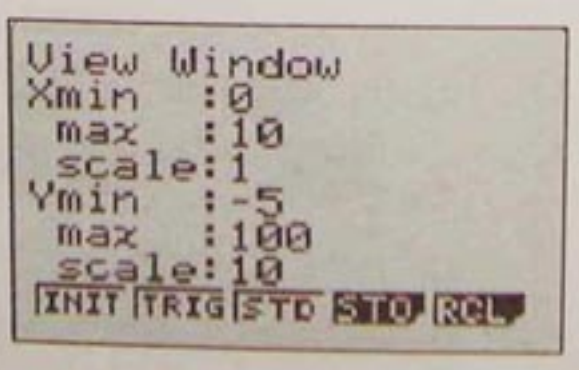
❹ F6 EXE

(TABL)



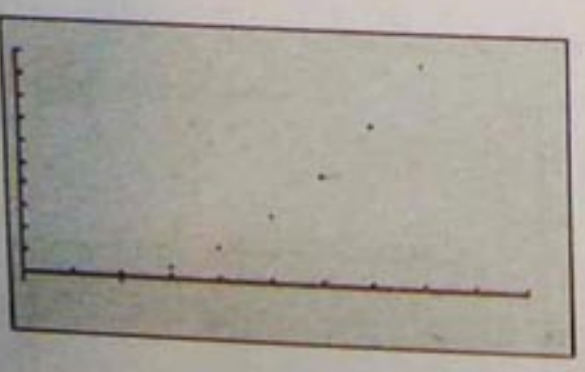
❺ SHIFT F3

ونتمم



❻ F6 (TABL) F6 EXIT

(G,PLT)



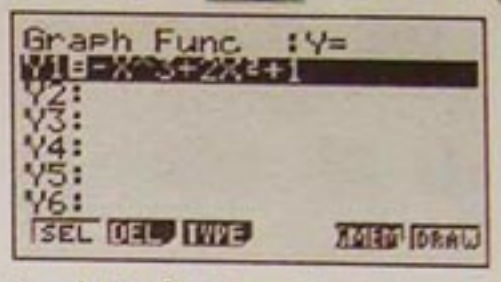
elbassair.net
موقع البصائر التعليمي

3. الدوال: فيما يلي نعتبر الدالة f المعرفة بـــ: $f(x)=-x^3+2x^2+1$

- **تمثيل دالة:**

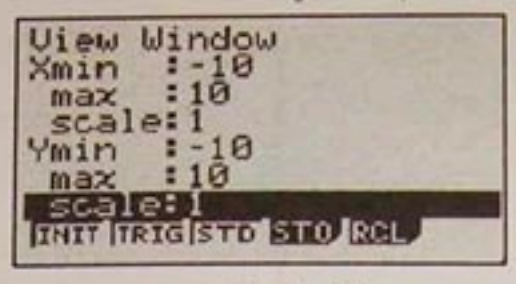
❶ MENU 5 (GRAPH)

نتمم باستعمال X,θ,T من أجل X

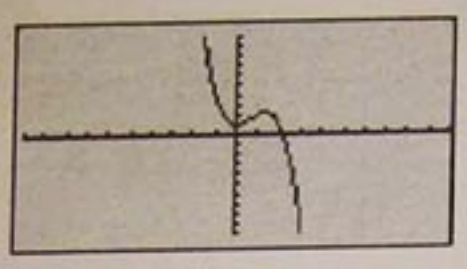


❷ SHIFT F3

و نتمم كما يلي:

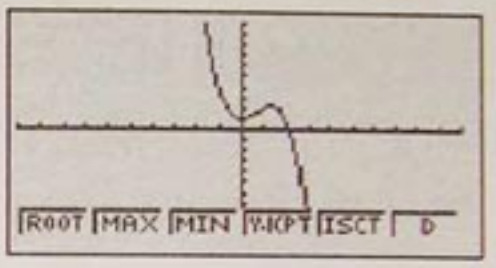


❸ F6 EXIT (DRAW)

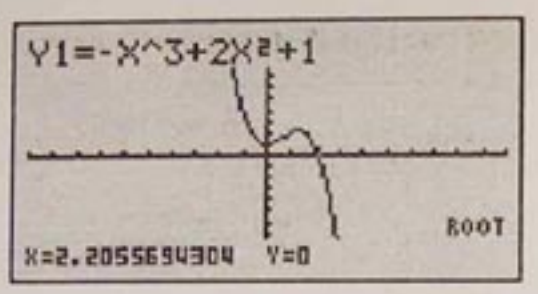


- **قراءة الفاصلة α لنقطة تقاطع المنحني مع محور الفواصل:**

❶ SHIFT F5 F1 (ROOT)



❷ نقرأ فاصلة α



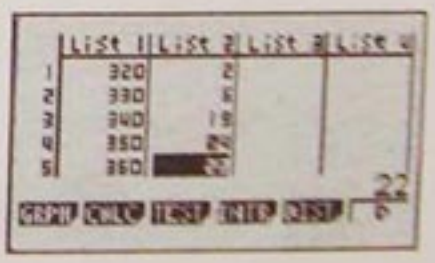
4. الإحصاء:

فيما يلي نعتبر السلسلة الإحصائية التالية:

الكتلة (g)	320	330	340	350	360	370	380
التكرار	2	6	19	24	22	19	8

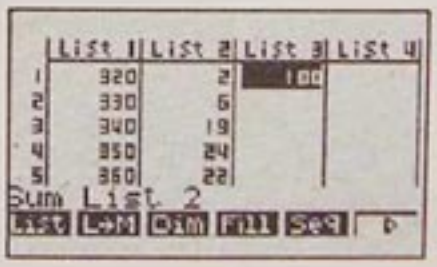
❶ MENU 2 (STAT)

و أتمم



❷ لإظهار التكرار الكلي في L3 :

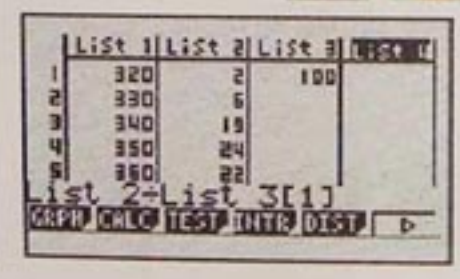
F6 (LIST) F1 OPTN F1 F6 (sum) F1 F6 EXE 2 (LIST)



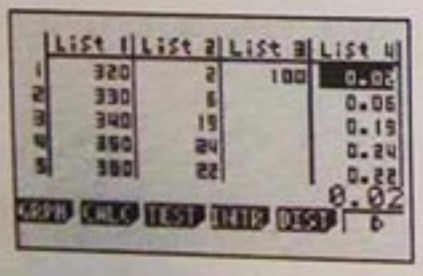
❸ من أجل إظهار سلسلة التواترات في L4 ،نحدد في الأعلى L4 و:

F1 ÷ 2 (LIST) F1

(( ) + SHIFT 3 (LIST)) − SHIFT

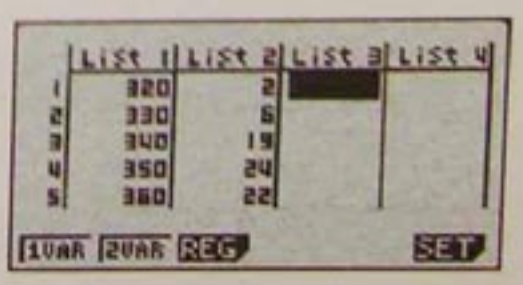


❹ EXE و العمود L4 يتمم



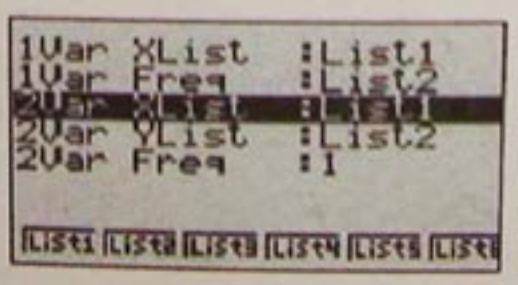
حساب مقاييس النزعة المركزية و مقاييس التشتت:

❶ F2 (CALC)

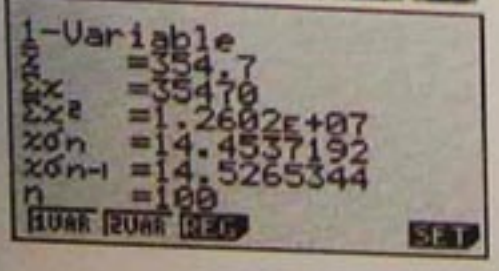


❷ F6 (SET) ثم F1 (List1)

EXE (List2) F2 EXE



❸ F1 EXIT (1VAR)، نقرأ $\overline{X}$ و الانحراف المعياري $s=X\sigma n$ ونقرأ Q_1 و Q_3 ، ↓ ↓ ↓



elbassair.net

محتويات البرنامج

1. التحليل

المحتوى المعرفي	الكفاءات المستهدفة	توجيهات وتعاليق وأنشطة
• **المتتاليات العددية** المتتاليات المحدودة من الأعلى، المتتاليات المحدودة من الأسفل، المتتاليات المحدودة.	– تبيان أنّ متتاليات محدودة من الأعلى أو محدودة من الأسفل أو محدودة.	بالنسبة إلى دراسة تغيرات متتالية، نقترح أمثلة نتناول فيها دراسة إشارة الفرق $u_{n+1}-u_n$ أو مقارنة النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ بالعدد 1 أو الرجوع إلى تغيّرات الدالة f في حالة متتالية حدّها العام $u_n=f(n)$.
المتتاليات الرتيبة.	– التعرّف إن كانت متتالية رتيبة.	
المتتاليات المتقاربة.	– تبيان إن كانت متتالية متقاربة.	نعتمد في دراسة المتتاليات المقاربة على المقاربة الحدسية لمفهوم نهاية دالة (برنامج السنة الثانية). تقبل النظريات حول المتتاليات المحدودة والمتتاليات الرتيبة والتي يمكن تجسيدها باستعمال الحاسبة أو المجدول.
المتتاليات (u_n) بحيث $u_{n+1}=au_n+b$	– التعرف على متتالية معرفة بالعلاقة التراجعية $u_{n+1}=au_n+b$ وحساب حدودها.	نتناول بالخصوص حالة متتاليات هندسية. نجعل التلميذ يدرك أنّ المتتالية (u_n) حيث $u_{n+1}=au_n+b$ حالة خاصة للمتتالية التراجعية $u_{n+1}=f(u_n)$ مع f الدالة التآلفية $x\mapsto ax+b$. ندرس رتابة المتتالية (u_n) حسب رتابة الدالة f، كما ندرس تقاربها بالاستعانة بالمتتالية الهندسية المرفقة (v_n) حيث $v_n=u_n-\frac{b}{1-a}$. مثال: دراسة إيداع رصيد معطى مع سحب سنوي لمبلغ معيّن.
	- البرهان بالتراجع على صحة خاصية في حالة بسيطة.	نختار دستورا بسيطا (مثل مجموع n عددا أوليا الأولى، مجموع n مربعا الأولى، ...) لتأسيس مبدأ الاستدلال بالتراجع.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

• **الدوال العددية الاستمرارية.**	- فهم معنى دالة مستمرة على مجال.	بالنسبة إلى مفهوم الاستمرارية، نقتصر على مقاربة حدسية ونعطي مثالا لدالة غير مستمرة عند نقطة. نذكّر بأنّ الأسهم المائلة في جدول تغيرات لدالة تترجم استمرارية ورتابة الدالة على المجال المعتبر. نقبل بأنّ كلّ الدوال المحصل عليها بالعمليات على دوال مألوفة أو بتركيبها مستمرة على كلّ من المجالات التي تكون معرفة عليها.
الاستمرارية والمعادلات: نظرية القيم المتوسطة.	- فهم خاصية القيم المتوسطة وتطبيقها في البحث عن الحلول المقربة لمعادلات من الشكل: $f(x)=\lambda$.	نقبل خاصية القيم المتوسطة وتفسّر بيانيا.
مفهوم دالة مركبة.	- تعريف مركب دالتين. - التعرّف على دالة كمركب دالتين بسيطتين.	نذكر هنا ترابط الدوال المرجعية المدروس في السنة الأولى. نركز على شرط وجود دالة مركب دالتين.
اشتقاق دالة مركبة دالتين.	- حساب $(g\circ f)'$ في حالة f قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$.	يعطى مثال لحساب $(g\circ f)'(x_0)$ في حالة بسيطة (f دالة خطية و g دالة مرجعية أخرى). يقبل الدستور الذي يعطي $(g\circ f)'(x_0)$ في الحالة العامة لدوال قابلة للاشتقاق عند x_0 .
تتمات على النهايات: العمليات على النهايات؛ نهاية دالة مركب؛ النهاية بالمقارنة.	- تعيين نهاية دالة بتطبيق النتائج على نهايات مجموع أو جداء أو حاصل قسمة أو النظريات المتعلقة بنهايات دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند ∞ .	نكمل النتائج المحصل عليها في السنة الثانية ونقتصر على مقاربة حدسية. لتعيين النهايات عند ∞ للدوال كثيرات الحدود والناطقة، نطبق القواعد الإجرائية على الحدود الأعلى درجة. نقبل النظرية المتعلقة بنهاية دالة مركب دالتين مستمرتين عند ∞ ونفسّر بياتيا النظريات التي تعطي النهاية بالمقارنة. بالنسبة إلى الترميز المتعلق بنهاية دالة f عند x_0 يستبدل الترميز المتداول $\lim_{x\to x_0} f(x)$ بالترميز

elbassair.net

المستقيمات المقاربة: الوضع النسبي لمنحن و المستقيم المقارب.	- تعيين المستقيمات المقاربة الموازية لمحوري الاحداثين. - اثبات وجود مستقيم مقارب مائل بالنسبة إلى منحن ممثل لدالة وتعيين معادلة له في حالة دالة f معرفة كما يلي: $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ وتحديد الوضع النسبي للمنحني و المستقيم المقارب.	يبرر وجود مستقيم مقارب بالنسبة لمنحن ممثل لدالة وكذا الوضع النسبي للمنحني و المستقيم المقارب الممكن لهذا المنحني.
الدوال الأصلية لدالة على مجال.	- تعريف دالة أصلية لدالة على مجال. - تعيين دالة أصلية لدالة تحقق شرطا معينا وتفسير ذلك بيانيا.	يربط بين مفهومي المشتقة والدالة الأصلية. نقبل أنّه إذا كانت f دالة مستمرة على مجال I فإنّ f تقبل دوالا أصلية على I تختلف بثابت فقط. عند البحث عن الدوال الأصلية، يدرّب التلميذ على قراءة جدول المشتقات عكسيا. تعطى أمثلة لدالة أصلية لدالة تحقق شرطا معينا من مجال الاقتصاد (العلاقة بين الكلفة الهامشية و الكلفة الإجمالية).
تكامل دالة	- حساب $\int_a^b f(t)\,dt$.	
خواص التكامل: الخطية؛ علاقة شال؛ الترتيب.		انطلاقا من مثال بسيط (دالة تآلفية أو الدالة مربع)، نربط بين الدالة الأصلية ومساحة الحيز تحت المنحني الممثل لدالة. نقبل بتعميم النتيجة بالنسبة إلى دالة مستمرة وموجبة على مجال وندخل كتابة التكامل $\int_a^b f(t)\,dt$ في الحالة العامة. يحرص على شرح دور المتغيّر في هذه الكتابة كما ندخل الكتابة $\int_a^x f(t)\,dt$. تعطى أمثلة تطبيقية من مجال الاقتصاد.
القيمة المتوسطة لدالة على مجال.	- حساب القيمة المتوسطة لدالة وتفسيرها.	
الدالة اللوغاريتم النيبيري؛ الدالة الأسية: الخواص المميزة؛ المشتقة؛ التمثيل البياني؛ السلوك التقاربي. الكتابة e^x.	- تعريف الدالة اللوغاريتم النيبيري أو الدالة الأسية ومعرفة الخواص المميزة لكلّ منهما. - استعمال حاسبة لحساب قيم دوال لوغاريتم نيبيري أو دوال أسية. - حلّ معادلات ومتراجحات تتضمن لوغاريتمات أو	ندخل الدالة اللوغاريتم النيبيري كالدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ التي تنعدم من أجل $x = 1$. مع الملاحظة أنها أيضا

elbassair.net
موقع عيون البصائر التعليمي

	أسيات. – حساب نهايات جداءات أو حواصل قسمة يتدخل فيها x^n ، $\ln x$ ، $\exp(x)$. – دراسة دوال من الشكل $\ln \circ u$ أو $\exp \circ u$. – استعمال الكتابات المألوفة $\ln x$ ، e ، $\log x$ ، e^x.	مساحة الحيّز تحت المنحنى الممثل للدالة $t \mapsto \frac{1}{t}$ بين 1 و x من أجل x موجب. تسمح دراسة الخواص المميزة لهذه الدالة بإبراز الدور الهام لها في الحساب العددي. بالنسبة إلى إدخال الدالة $x \mapsto \exp(x)$ ، نقبل بوجود دالة تسمح بإرفاق بـــ $\ln x$ العدد x.
الدالة اللوغاريتم للأساس a مع $a \neq 1$ و $a > 0$؛ الدالة اللوغاريتم العشري. الدالة الأسية للأساس a مع $a > 0$ و $a \neq 1$؛ الدوال القوى. التزايد المقارن للدوال اللوغاريتم والقوى والأسية.	– حلّ مشكلات متعلقة بإيداع أو تسديد تتدخل فيها اللوغاريتمات أو الأسيات. معرفة وتفسير النهايات: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ، $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ، $\lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$	تقبل النتائج المتعلقة بالنهايات المشهورة. نبيّن لماذا يوافق اللوغاريتم العشري لعدد طبيعي عدد أرقامه وأهمية المقاييس اللوغاريتمية. تعطى أمثلة من مجال الاقتصاد والرياضيات المالية. نجعل التلميذ يلاحظ، انطلاقا من التمثيلات البيانية للدوال $x \mapsto \ln x$، $x \mapsto e^x$، $x \mapsto x^n$ حيث n عدد طبيعي غير منعدم، أنّ هذه الدوال تؤول كلّها نحو $+\infty$ عندما $x \to +\infty$، لكن سلوكها مختلف ومن ثمّ استنتاج التزايد المقارن لها: في اللانهاية، تتفوق الدالة الأسية على الدالة " قوة " والدالة " قوة " على الدالة اللوغاريتم. في هذا المجال يمكن استعمال الحاسبة البيانية أو المجدول لتجسيد هذه السلوكات.

2. الإحصاء والاحتمالات

المحتوى المعرفي	الكفاءات القاعدية	توجيهات وتعاليق وأنشطة
• **الإحصاء** السلاسل الإحصائية لمتغيرين عدديين: تعريف. سحابة نقط؛ النقطة المتوسطة.	– تعريف سلسلة إحصائية لمتغيرين عدديين. – تمثيل سلسلة إحصائية لمتغيرين عدديين بسحابة نقط. – تعيين إحداثيي النقطة المتوسطة.	تعطى أمثلة عن سلاسل إحصائية لمتغيرين عدديين مثل، القامة والوزن، الأجرة والسّن لمجتمع معيّن. في معلم متعامد، نسمّي سحابة نقط مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث x و y هما متغيرا السلسلة. نقصد بالنقطة المتوسطة النقطة $G(\bar{x};\bar{y})$. تقترح أمثلة حيث تعطي مجموعة

elbassair.net

تعديل خطي. المحاكاة: تلاؤم معطيات تجريبية مع قانون متساوي الاحتمال.	- إنشاء مستقيم تعديل خطي . - إنجاز محاكاة لتبيان تلاؤم معطيات تجريبية مع قانون متساوي الاحتمال.	الثنائيات $(x;\ln y)$ أو $(\ln x;y)$ تمثيلا أكثر مقروئية وبالتالي تسهل الترجمة. وهي مناسبة للتطرق إلى المعالم اللوغاريتمية المستعملة في الاقتصاد. عندما يكون لسحابة النقط المرفقة بسلسلة إحصائية لمتغيرين عدديين شكل متطاول، نتساءل عن إمكانية إنشاء مستقيم تقع حوله نقط السحابة. نشرح مبدأ المربعات الدنيا، حيث نحسب $S = M_1P_1^2 + M_2P_2^2 + ... + M_nP_n^2$ من أجل $i = 1,2,....,n$، حيث M_i هي نقط السحابة ذات الاحداثيات $(x_i;y_i)$ و P_i هي نقط المستقيم ذات الاحداثيات $(x_i;ax_i+b)$. نقبل بوجود مستقيم (يسمّى مستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا) يشمل النقطة المتوسطة للسحابة ويجعل المجموع S أصغريا. نحصل على معاملات المعادلة المختصرة لمستقيم الانحدار بالمربعات الدنيا بالدساتير الآتية والتي تقبل دون برهان: $a = \dfrac{\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{xy}}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x-\overline{x}\right)^2}$ $b = \overline{y} - a\overline{x}$ أو بالاستعانة بحاسبة. نجعل التلميذ يدرك بأنّ القيام بتسوية خطية يعني إيجاد دالة خطية تعبّر بكيفية تقريبية عن y بدلالة x وتستغل هذه الدالة للقيام باستكمالات داخلية أو استكمالات خارجية. تكون الدراسة بمحاكاة وعلى مثال لظاهرة عشوائية لها إمكانيتين. مثال: نسترجع نتائج رمي قطعة نقدية 500 مرة.

موقع عيون البصائر التعليمي

elbassair.net

		نقوم بمحاكاة 500 رمية عددا كبيرا من المرات ونلاحظ توزيع النتائج المتعلقة بـــ " الوجه"، مثلا ونقرّر إن كانت النتيجة التجريبية المعطاة مقبولة.
• **الاحتمالات** قانون احتمال مرفق بتجربة عشوائية.	– تعيين قانون احتمال مرفق بتجربة عشوائية لها عدد منته من الامكانيات.	يمدد هنا العمل الذي شرع فيه في السنة الثانية بالتركيز على استعمال الجداول وأشجار الاختيارات للرجوع إلى حالة تساوي الاحتمال أو إلى احتمالات الحوادث البسيطة. نميّز بين السّحب في آن واحد والسّحب على التوالي بالإرجاع أو بدون الإرجاع.
الاحتمال الشرطي.	– حساب احتمال حادثة علما حدوث حادثة أخرى.	ندخل تعريف الاحتمال الشرطي انطلاقا من مثال نستعمل فيه شجرة التواترات. نقصد بالكتابة $P_A(B)$ احتمال الحادثة B علما أنّ الحادثة A محققة.
الشجرة المتوازنة.	– بناء شجرة متوازنة. – استعمال أشجار متوازنة أو دستور الاحتمالات الكلية لحساب احتمالات وحلّ مشكلات.	تعطى، انطلاقا من أمثلة بسيطة، قواعد استعمال شجرة متوازنة لحساب احتمالات ويستنتج دستور الاحتمالات الكلية.
استقلال حادثتين.	– التعرّف على حادثتين مستقلتين.	نرتكز على تجارب مستقلة (مثال: رمي قطعة نرد ثمّ قطعة نقدية) لتعميم المبدأ الضربي، بمعنى أنّه بالنسبة إلى حوادث مستقلة يكون احتمال قائمة نتائج هو جداء احتمالات كلّ نتيجة.
الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري المرفقة بقانون احتمال عددي.	– حساب الأمل الرياضي والتباين والانحراف المعياري المرفقة بقانون احتمال.	تستخرج المفاهيم الأساسية انطلاقا من تجارب عشوائية متقطعة ذات إمكانيات عددية. يربط ذلك بالتباين والانحراف المعياري لسلسلة إحصائية.
قانون برنولي، قانون ثنائي الحدّ.	– تعريف قانون برنولي وقانون ثنائي الحدّ واستعمالهما لحساب احتمالات حوادث.	يقصد بتجربة برنولي تجربة عشوائية يهمنا فيها فقط تحقيق حادثة A (النجاح) أو عدم تحقيقها $\overline{A}$ (الإخفاق). يعرّف القانون ثنائي الحدّ كقانون احتمال مرفق بتجربة برنولي محققة n مرّة بكيفية مستقلة. نقتصر على الحالات $n \leq 5$ ونستعمل، للحساب، شجرة متوازنة.

elbassair.net

لتحميل الكتب المدرسية
الابتدائي-المتوسط-الثانوي
إضغط هنا

موقع عيون البصائر التعليمي



